

2001.05.03-05.27 , 2002.05.23-06.05 , 2003.04.10-05.26

## 惑星運動の理論

### 1. 相対運動の方程式

宇宙空間に適当な慣性座標系を取る。質量  $m_1$  の天体（人工衛星）と質量  $m_2$  の天体（地球）の運動（2体問題）を考える。以下の議論においては、天体を質点として扱う。また、両天体間の質点としての相対運動を議論するので、両天体の自転は考慮しない。

質点  $m_1$  と質点  $m_2$  の位置を

$$\mathbf{R}_1 = (X_1, Y_1, Z_1) \quad (1.1a)$$

$$\mathbf{R}_2 = (X_2, Y_2, Z_2) \quad (1.1b)$$

とすると、それぞれの質点の運動は

$$\ddot{X}_1 = -Gm_2 \frac{(X_1 - X_2)}{R^3}$$

$$\ddot{Y}_1 = -Gm_2 \frac{(Y_1 - Y_2)}{R^3} \quad (1.2a)$$

$$\ddot{Z}_1 = -Gm_2 \frac{(Z_1 - Z_2)}{R^3}$$

および

$$\ddot{X}_2 = Gm_1 \frac{(X_1 - X_2)}{R^3}$$

$$\ddot{Y}_2 = Gm_1 \frac{(Y_1 - Y_2)}{R^3} \quad (1.2b)$$

$$\ddot{Z}_2 = Gm_1 \frac{(Z_1 - Z_2)}{R^3}$$

で与えられる。ここで、 $R$  は両質点間の距離である。ベクトルを用いて表すと

$$\ddot{\mathbf{R}}_1 = -Gm_2 \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{R^3} \quad (1.3a)$$

$$\ddot{\mathbf{R}}_2 = Gm_1 \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{R^3} \quad (1.3b)$$

となる。

両質点の重心の位置を

$$\mathbf{R}_0 = (X_0, Y_0, Z_0) \quad (1.4)$$

とすると

$$\mathbf{R}_0 = \frac{m_1 \mathbf{R}_1 + m_2 \mathbf{R}_2}{m_1 + m_2} \quad (1.5)$$

である。(1.3)式から

$$\ddot{\mathbf{R}}_0 = 0 \quad (1.6)$$

が簡単に導けるので、重心は等速直線運動をすることが分かる。

重心を原点とする座標（慣性座標系）を考えて、この座標系での両質点の位置を

$$\tilde{\mathbf{n}}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{h}_1, \mathbf{z}_1) \quad (1.7a)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_2 = (\mathbf{x}_2, \mathbf{h}_2, \mathbf{z}_2) \quad (1.7b)$$

とすると

$$\tilde{\mathbf{n}}_1 = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0 = \frac{m_2(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{m_1 + m_2} \quad (1.8a)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_2 = \mathbf{R}_2 - \mathbf{R}_0 = \frac{-m_1(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{m_1 + m_2} \quad (1.8b)$$

である。(1.8)式と(1.3)式および(1.6)式より

$$\tilde{\mathbf{n}}_1 = \ddot{\mathbf{R}}_1 = -Gm_2 \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{R^3} \quad (1.9a)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_2 = \ddot{\mathbf{R}}_2 = Gm_1 \frac{(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2)}{R^3} \quad (1.9b)$$

となるが、 $\tilde{\mathbf{n}}_1, \tilde{\mathbf{n}}_2$  が重心からの相対位置ベクトルであるから

$$m_1 \tilde{\mathbf{n}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{n}}_2 = 0 \quad (1.10)$$

であるので、これを用いると

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 &= \tilde{\mathbf{n}}_1 - \tilde{\mathbf{n}}_2 \\ &= \frac{m_2(\tilde{\mathbf{n}}_1 - \tilde{\mathbf{n}}_2)}{m_2} = \frac{(m_1 + m_2)\tilde{\mathbf{n}}_1}{m_2} \end{aligned} \quad (1.11a)$$

$$= \frac{m_1(\tilde{\mathbf{n}}_1 - \tilde{\mathbf{n}}_2)}{m_1} = -\frac{(m_1 + m_2)\tilde{\mathbf{n}}_2}{m_1} \quad (1.11b)$$

であるので、(1.9)式は

$$\tilde{\mathbf{n}}_1 = -G \frac{m_2^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\tilde{\mathbf{n}}_1}{r_1^3} \quad (1.12a)$$

$$\tilde{\mathbf{n}}_2 = -G \frac{m_1^3}{(m_1 + m_2)^2} \frac{\tilde{\mathbf{n}}_2}{r_2^3} \quad (1.12b)$$

となる。

質点  $m_2$  を原点とする座標を考えて、この座標系（非慣性座標系）での質点  $m_1$  の位置を

$$\mathbf{r} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2 = \tilde{\mathbf{n}}_1 - \tilde{\mathbf{n}}_2 = (x, y, z) \quad (1.13)$$

とすると、(1.11a)式より

$$\mathbf{r} = \frac{(m_1 + m_2)\tilde{\mathbf{n}}_1}{m_2} \quad (1.14)$$

であるので、質点  $m_1$  の質点  $m_2$  に対する相対の運動方程式は、(1.12a)式より

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{m} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.15)$$

と書ける。ここで

$$\mathbf{m} = G(m_1 + m_2) \quad (1.16)$$

とする。これは、単独に存在する質点  $m_1$  が逆自乗の中心力  $-Gm_1(m_1 + m_2)\mathbf{r}/r^3$  を受けて行う運動に外ならない。

## 2. 相対運動の方程式の積分

(1.15)式で与えられる相対運動の方程式を解くことを考える。解くということは、座標  $(x, y, z)$  を時間  $t$  の関数として求めることである。(1.15)式から、 $c_i, i=1, 2, \dots, 6$  を定数として、位置  $(x, y, z)$  と速度  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  に関する 6 個の方程式

$$f_i(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) = c_i, \quad i=1, 2, \dots, 6 \quad (2.1)$$

が求まったものとする、この方程式を代数的に解けば

$$\begin{aligned} x &= x(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ y &= y(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \\ z &= z(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5, c_6, t) \end{aligned} \quad (2.2)$$

のように解が求まる。この解は、位置  $(x, y, z)$  と速度  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  に関する 6 個の初期条件を満たすことが可能である。(2.1)式のようなものを積分という。したがって、6 個の積分を求めることにより運動方程式を解くことになるが、以下に述べる方法はかなり天下りの的である。これを避けるためには、解析力学の正準変換の理論（付録 A）によらねばならない。

まず、角運動量保存則を利用して 3 個の積分を求める。そのために、運動方程式

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{m} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (1.15)$$

の両辺と  $\mathbf{r}$  とのベクトル積を取ると

$$\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{m} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r^3} = 0 \quad (2.3)$$

を得る。これより

$$0 = \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}}{dt} \quad (2.4)$$

が求まる。これを積分すると

$$\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{h} \quad (2.5)$$

という3個の積分を得る。ここで

$$\mathbf{h} = (h_x, h_y, h_z) \quad (2.6)$$

は積分定数で、単位質量あたりの角運動量ベクトルである。(2.5)式から、 $\mathbf{r}$ と $\dot{\mathbf{r}}$ は定ベクトル $\mathbf{h}$ と垂直である。すなわち、質点 $m_1$ の運動は定ベクトル $\mathbf{h}$ に垂直な面内で起きる。

つぎに、(1.15)式の両辺と角運動量ベクトル $\mathbf{h}$ とのベクトル積を取ると

$$\mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{m} \frac{\mathbf{h} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.7)$$

を得る。 $\mathbf{h} \times \mathbf{r}$ に(2.5)式を代入すると、 $x$ 成分は

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \times \mathbf{r})_x &= h_y z - h_z y \\ &= (z\dot{x} - x\dot{z})z - (x\dot{y} - y\dot{x})y \\ &= (x^2 + y^2 + z^2)\dot{x} - x(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) \\ &= r^2 \dot{x} - x(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

となる。(2.8)式の右边第2項に

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2 \quad (2.9)$$

を微分して得られる

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = r\dot{r} \quad (2.10)$$

を代入すると

$$(\mathbf{h} \times \mathbf{r})_x = r^2 \dot{x} - xr\dot{r} \quad (2.11)$$

となる。 $y, z$ 成分についても同様の関係が成り立つので

$$\mathbf{h} \times \mathbf{r} = r^2 \dot{\mathbf{r}} - r\mathbf{r}\dot{r} \quad (2.12)$$

を得る。これを(2.7)式に代入すると

$$\mathbf{h} \times \ddot{\mathbf{r}} = -\mathbf{m} \left( \frac{\dot{\mathbf{r}}}{r} - \frac{\mathbf{r}\dot{r}}{r^2} \right) = -\mathbf{m} \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (2.13)$$

と書ける。これを積分すると

$$\frac{1}{\mathbf{m}} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} = -\frac{\mathbf{r}}{r} - \mathbf{e} \quad (2.14)$$

という3個の積分が求まる。ここで、 $\mathbf{e}$ は積分定数で、離心ベクトルという名がつけられている。最終的に軌道は2次曲線であることが判明するが、2次曲線の原点から焦点を結ぶベクトルは離心ベクトルと平行になるからである。

(2.14)式の両辺と $\mathbf{h}$ のスカラー積を取ると、(2.5)式より

$$0 = \mathbf{h} \cdot \mathbf{e} = h_x e_x + h_y e_y + h_z e_z \quad (2.15)$$

であるので、(2.5)式と(2.14)式の積分のすべてが独立でないことが分かる。もうひとつの積分として、エネルギー保存則が使えそうであるが、以下に示すように、これは正しくない。

(2.14)式を書き直すと

$$\mathbf{e} = -\frac{1}{m} \mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.16)$$

となる。この式の両辺を自乗すると

$$e^2 = \frac{1}{m^2} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) + \frac{2}{m} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + 1 \quad (2.17)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) &= (h_y \dot{z} - h_z \dot{y})^2 + (h_z \dot{x} - h_x \dot{z})^2 + (h_x \dot{y} - h_y \dot{x})^2 \\ &= (h_x^2 + h_y^2 + h_z^2)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - (h_x \dot{x} + h_y \dot{y} + h_z \dot{z})^2 \\ &= h^2 \dot{\mathbf{r}}^2 - (\mathbf{h} \cdot \dot{\mathbf{r}})^2 = h^2 \dot{\mathbf{r}}^2 \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} &= (h_y \dot{z} - h_z \dot{y})x + (h_z \dot{x} - h_x \dot{z})y + (h_x \dot{y} - h_y \dot{x})z \\ &= -h_x (y\dot{z} - z\dot{y}) - h_y (z\dot{x} - x\dot{z}) - h_z (x\dot{y} - y\dot{x}) = -h^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

を使って右辺を変形すると、(2.17)式は

$$e^2 = \frac{h^2 \dot{\mathbf{r}}^2}{m^2} - \frac{2h^2}{m} + 1 \quad (2.20)$$

となる。これを書きなおすと

$$\frac{\dot{\mathbf{r}}^2}{2} - \frac{m}{r} = \frac{m^2}{2h^2} (e^2 - 1) \quad (2.21)$$

が求まる。左辺の第1項は単位質量あたりの運動エネルギー、第2項は位置エネルギーであるので、(2.21)式はエネルギー保存則である。この式より、離心ベクトルが一定ならばエネルギーは一定であるので、エネルギー保存則は新たな積分ではない。

もうひとつの積分を求めるために、(2.14)式で与えられる離心ベクトルの積分の両辺と位置ベクトル $\mathbf{r}$ のベクトル積を取ると

$$\frac{1}{m} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r} \times \mathbf{r}}{r} - \mathbf{e} \times \mathbf{r} = -\mathbf{e} \times \mathbf{r} \quad (2.22)$$

を得る。左辺を変形すると

$$\begin{aligned}
 [(\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r}]_x &= (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}})_y z - (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}})_z y \\
 &= (h_z \dot{x} - h_x \dot{z})z - (h_x \dot{y} - h_y \dot{x})y \\
 &= -h_x(x\dot{x} + y\dot{y} + z\dot{z}) + (h_x x + h_y y + h_z z)\dot{x} \\
 &= -h_x \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} + (\mathbf{h} \cdot \mathbf{r})\dot{x} = -h_x r \dot{r}
 \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる。したがって

$$(\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \times \mathbf{r} = -h r \dot{r} \tag{2.24}$$

これを代入すると

$$\frac{1}{m} h r \dot{r} = \mathbf{e} \times \mathbf{r} \tag{2.25}$$

を得る。この式の両辺の絶対値を取ると

$$\frac{1}{m} h r = e \sin f \tag{2.26}$$

が求まる。ここで、 $f$  は離心ベクトル  $\mathbf{e}$  と位置ベクトル  $\mathbf{r}$  がなす角度である。

一方、(2.14)式で与えられる離心ベクトルの積分の両辺と位置ベクトル  $\mathbf{r}$  のスカラー積を取ると

$$\frac{1}{m} (\mathbf{h} \times \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = -\frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}}{r} - \mathbf{e} \cdot \mathbf{r} = -r - e r \cos f \tag{2.27}$$

を得る。左辺に(2.19)式を代入すると

$$r = \frac{h^2}{m(1 + e \cos f)} \tag{2.28}$$

を得る。これは、軌道面内に取りられた極座標で表された軌道の方程式である。この式を微分すると

$$\dot{r} = \frac{h^2 e \sin f}{m(1 + e \cos f)^2} \dot{f} \tag{2.29}$$

であるので、この式を(2.26)式に代入すると

$$\frac{h^3}{m^2 (1 + e \cos f)^2} df = dt \tag{2.30}$$

が求まる。この式を積分すると

$$\int \frac{h^3}{m^2 (1 + e \cos f)^2} df = t - t_0 \tag{2.31}$$

を得る。ここで、 $t_0$  は積分定数である。この式を 6 番目の積分と考えてよいであろう。

### 3. 軌道の方程式

(2.28)式は質点  $m_1$  の運動軌跡を与え、(2.26)式が速度を与えるから、質点  $m_1$  の運動はこの2式によって完全に記述されているが、軌道の方程式についてもう少し検討してみよう。

(2.28)式で与えられる軌道方程式

$$r = \frac{h^2}{m(1 + e \cos f)} \quad (2.28)$$

から、 $f = 0$  のときに質点  $m_1$  が質点  $m_2$  に最も近づき、 $f = \pi$  のときに最も遠ざかる。前者を近日点(perihelion)、後者を遠日点(aphelion)という。これは太陽の周りの惑星運動を考察したときのなごりである。以下の議論においては、近日点の方向に  $x$  軸を取っているものとする。近日点の座標を  $(x_p, 0)$ 、遠日点の座標を  $(x_a, 0)$  とすると、 $x_p, x_a$  は

$$x_p = \frac{h^2}{m(1 + e)} \quad (3.1a)$$

$$x_a = \frac{-h^2}{m(1 - e)} \quad (3.1b)$$

で与えられる。これより

$$x_p - x_a = \frac{h^2}{m(1 + e)} + \frac{h^2}{m(1 - e)} = \frac{2h^2}{m(1 - e^2)} \quad (3.2)$$

であるので

$$x_p - x_a = 2a \quad (3.3)$$

とすると

$$\frac{h^2}{m} = a(1 - e^2) \quad (3.4)$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (3.5)$$

$$x_p = a(1 - e) \quad (3.6a)$$

$$x_a = -a(1 + e) \quad (3.6b)$$

と書ける。近日点  $(x_p, 0)$  と遠日点  $(x_a, 0)$  の中間点を  $(x_0, 0)$  とすると

$$x_0 = \frac{1}{2}(x_p + x_a) = -ae \quad (3.7)$$

となる。すなわち、中間点と質点  $m_2$  を結ぶベクトルは  $ae$  に外ならない。 $e$  を離心ベクトルと呼ぶ由縁である。 $e$  を離心率(eccentricity)と呼ぶ。

軌道方程式を  $(x, y)$  座標で記述してみよう。(3.5)式で与えられる軌道方程式より

$$x + ae = \frac{(1 - e^2)a \cos f}{(1 + e \cos f)} + ae = \frac{a(e + \cos f)}{(1 + e \cos f)} \quad (3.8a)$$

$$y = \frac{(1 - e^2)a \sin f}{(1 + e \cos f)} \quad (3.8b)$$

であるので

$$\frac{(x + ae)^2}{a^2} + \frac{y^2}{(a\sqrt{1 - e^2})^2} = 1 \quad (3.9)$$

が求まる。したがって、離心率  $e$  が1よりも小さいときは楕円、1よりも大きなときは双曲線になる。

以下の議論は、離心率  $e$  が1よりも小さい楕円軌道の場合に限る。 $a$  を長半径 (semi-major axis),  $f$  を真近点角 (true anomaly) と呼ぶ。図 3.1 に離心近点角 (eccentric anomaly)  $u$  の定義を示す。真近点角  $f$  と離心近点角  $u$  の関係

$$x = r \cos f = a \cos u - ae \quad (3.10)$$

に、(3.5)式を代入すると

$$\cos u = \frac{(1 - e^2) \cos f}{1 + e \cos f} + e = \frac{e + \cos f}{1 + e \cos f} \quad (3.11a)$$

$$\sin u = \sqrt{1 - \cos^2 u} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin f}{1 + e \cos f} \quad (3.11b)$$

を得る。(3.11a)式から

$$\cos f = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad (3.12a)$$

$$\sin f = \sqrt{1 - \cos^2 f} = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \quad (3.12b)$$

が求まる。一方、

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f} \quad (3.5)$$

$$x = r \cos f = \frac{a(1 - e^2) \cos f}{1 + e \cos f} \quad (3.13a)$$

$$y = r \sin f = \frac{a(1 - e^2) \sin f}{1 + e \cos f} \quad (3.13b)$$

に、(3.12)式を代入すると



$$x = a(\cos u - e) \tag{3.14a}$$

$$y = a\sqrt{1-e^2} \sin u \tag{3.14b}$$

$$r = a(1 - e \cos u) \tag{3.15a}$$

$$f = \tan^{-1}(y/x) \tag{3.15b}$$

となる。

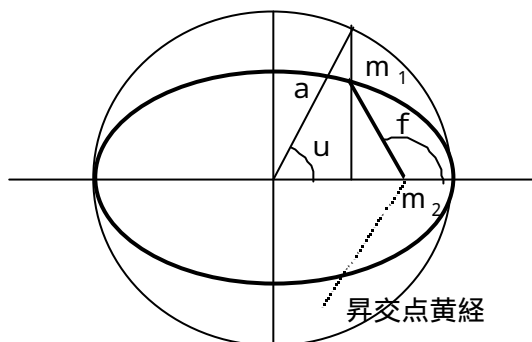


図 3.1 軌道形状

6 番目の積分

$$\int \frac{h^3}{\mathbf{m}^2 (1 + e \cos f)^2} df = t - t_0 \tag{2.31}$$

に, (3.12)式およびこれから導かれる

$$df = \frac{\sqrt{1-e^2}}{1 - e \cos u} du \tag{3.16}$$

を代入すると

$$\int \frac{h^3}{\mathbf{m}^2 (1 - e^2)^{3/2}} (1 - e \cos u) du = t - t_0 \tag{3.17}$$

が得られる。この式は,  $u$  で積分可能である。積分を実行した上で, (3.4)式を代入すると

$$(u - e \sin u) = n(t - t_0) \tag{3.18}$$

を得る。この式は, ケプラ - の方程式(Keplar's equation)といわれるもので

$$n = \frac{\mathbf{m}^2 (1 - e^2)^{3/2}}{h^3} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{a^3}} \tag{3.19}$$

は平均運動(mean motion)と呼ばれる。また,  $t_0$  は近日点通過時刻(time of perihelion passage)と呼ばれる。質点  $m_1$  が質点  $m_2$  のまわりを一周する時間を  $T$  とすると

$$T = \frac{2\mathbf{p}}{n} = 2\mathbf{p} \sqrt{\frac{a^3}{\mathbf{m}}} \tag{3.20}$$

となる。

太陽のまわりを回っている惑星の運動に関して、有名なケプラ - (J. Kepler) の発見した三つの法則がある。

第 1 法則：惑星の軌道は太陽をひとつの焦点とする楕円である。

第 2 法則：太陽と惑星を結ぶ動径が一定時間に掃引する面積は常に一定である...  
...面積速度の法則

第 3 法則：惑星軌道の長半径の 3 乗と公転周期の 2 乗との比は、惑星によらないで一定値を取る。

第 1 法則はすでに(3.9)式で述べられているので、他の 2 法則について解説する。まず、第 2 法則であるが、微小時間  $dt$  に掃引される面積  $dS$  は

$$2dS = |\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}} dt| = |\mathbf{h}| dt \quad (3.21)$$

であるので、 $dS/dt$  が一定であることが簡単に証明される。上の議論では、(2.5)式が用いられている。

つぎに、第 3 法則であるが、太陽の質量  $m_2$  は惑星の質量  $m_1$  よりもずっと大きいので(3.20)式と(1.16)式より

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\mathbf{m}}{4\mathbf{p}^2} = \frac{G}{4\mathbf{p}^2} (m_1 + m_2) \approx \frac{Gm_2}{4\mathbf{p}^2} \quad (3.22)$$

がいえる。

#### 4. 座標変換

以下においては、地球を周回する人工衛星に話を限定する。前節で求めた衛星（質量  $m_1$  の惑星）の運動は、軌道面固定座標  $(x, y, z)$  で求められたものである。衛星測位に用いるためには、これを地球固定座標に変換せねばならない。そこで、まず天球固定座標  $(X, Y, Z)$  に変換することを考える。図 4.1 に両座標の関係を示す。厳密に言うと、天球固定座標は宇宙空間の慣性座標ではないので、§ 1 の冒頭に述べた座標  $(X, Y, Z)$  とは異なるが、混乱は生じないと思われるので同じ記号を用いる。以下においては、 $(X, Y, Z)$  は図 4.1 で定義される天球固定座標である。

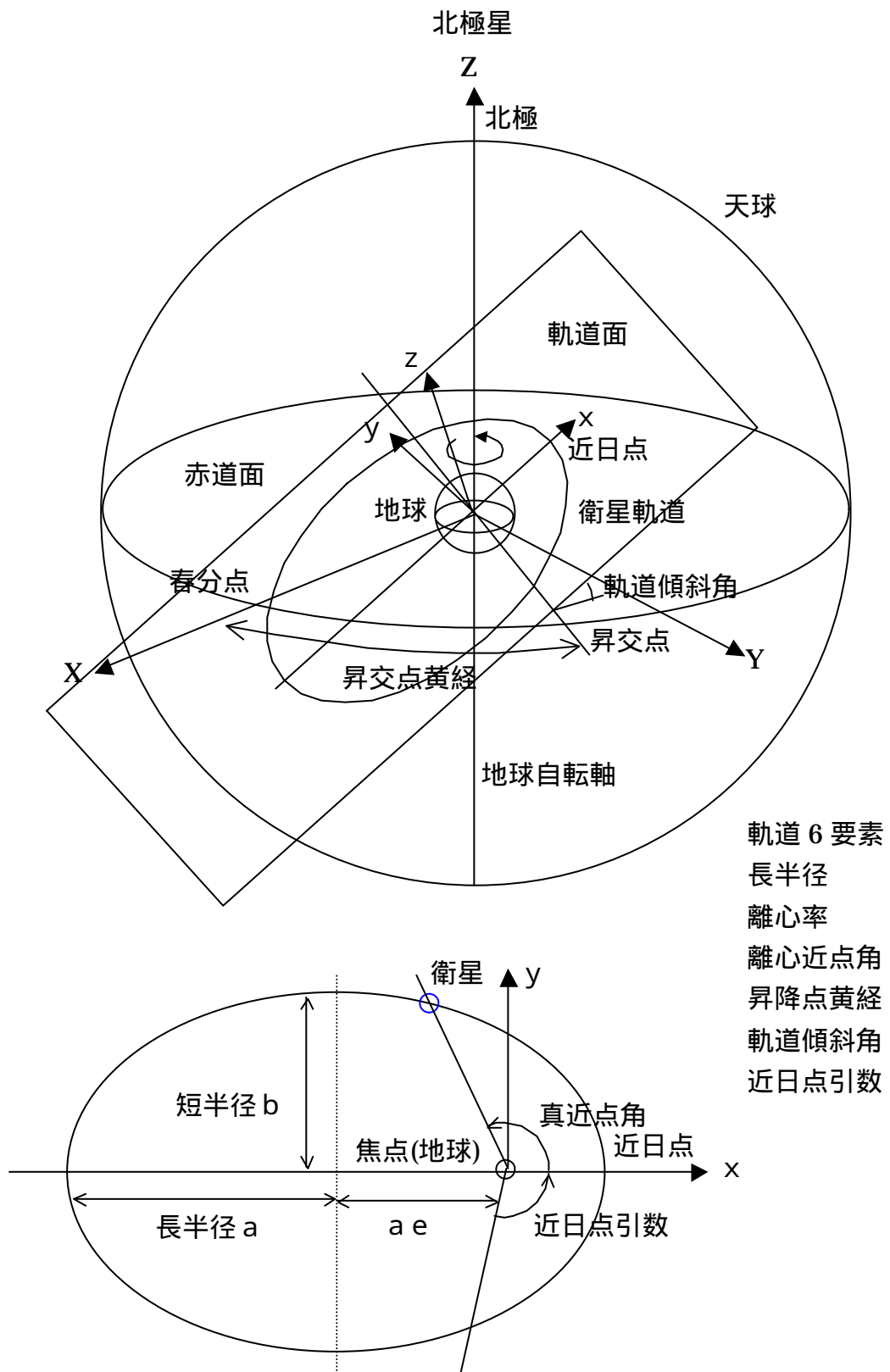


図 4.1 宇宙空間における惑星軌道

軌道が赤道面と交わる点のうち、南から北に抜ける点を昇交点(ascending node), 北から南に抜ける点を降交点と呼び, 昇交点の黄経を昇交点黄経(longitude of ascending node)と呼び,  $\Omega$  で表す。軌道面と赤道面のなす角度を軌道傾斜角(inclination)と呼び,  $i$  で表す。地球中心と昇交点を結ぶ直線が地球中心と近日点を結ぶ方向 ( $x$  軸の方向) となす角度を  $w$  で表し, 近日点引数(argument of perihelion)と呼ぶ。宇宙空間における衛星の軌道の向きは,  $\Omega, i, w$  で一意に指定される。

軌道面固定座標  $(x, y, z)$  から天球固定座標  $(X, Y, Z)$  への変換は以下の回転で実現できる。

(1)  $z$  軸の周りに角度  $-w$  の回転すると, 地球中心と昇交点黄経を結ぶ直線と  $x$  軸が一致する。

(2) 移動してきた  $x$  軸の周りに角度  $-i$  の回転をすると軌道面と赤道面が一致する。

(3) 移動してきた  $z$  軸の周りに角度  $-\Omega$  の回転すると,  $(x, y, z)$  と  $(X, Y, Z)$  が一致する。

$(x, y, z)$  から  $(X, Y, Z)$  への座標変換を行列を使って表すと

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega & -\sin \Omega & 0 \\ \sin \Omega & \cos \Omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

となる。

$(X_E, Y_E, Z_E)$  を地球固定座標とする。すなわち, 地球中心に原点を取り, 地球自転軸を  $Z_E$  軸, 経度 0 度の方向に  $X_E$  を取った座標系である。ある時刻における  $X_E$  の黄経を  $\Omega_E$  とすると, この時刻における軌道固定座標  $(x, y, z)$  から地球固定座標  $(X_E, Y_E, Z_E)$  への変換は

$$\begin{pmatrix} X_E \\ Y_E \\ Z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\Omega - \Omega_E) & -\sin(\Omega - \Omega_E) & 0 \\ \sin(\Omega - \Omega_E) & \cos(\Omega - \Omega_E) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i & -\sin i \\ 0 & \sin i & \cos i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

で与えられる。

## 5. 衛星運動の計算例 1 (補正項を考慮しない計算)

実際に地球を周回している GPS のデータを用いて, 軌道の計算を試みる。ただし, 理論の大筋を明確に理解するために, 実際の衛星運動の計算に必要な補正項は無視する。また, 本節では, 軌道面座標のみを計算する。詳しい衛星運動の計算は次節で述べる。

例として取り上げるのは, 1999 年 3 月 19 日 4 時 30 分 (GPS 時間) の衛星番号 PRN03 の衛星である。衛星の軌道計算に共通して必要な地心引力定数  $m$  (= 万有引力定数  $G \times$  地球質量  $E$ ) および地球自転角速度  $\Omega_e'$  は

$$m = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3/\text{s}^2 \quad (\text{WGS-84})$$

$$\Omega_e' = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad/s} \quad (\text{WGS-84})$$

である。計算に必要なパラメータの値は, 衛星から送られてくる航法メッセージ (navigation message) により与えられる。航法メッセージは暦とも呼ばれる。衛

星は種種の原因（例えば，地球重力場の不均等など）により摂動をうけるので，2 体運動による軌道計算だけでは，長時間にわたり正確な軌道を予測できない。衛星の位置を正確に出すために，航法メッセ - ジは，地上から衛星を追跡して得られるデータにより 2 時間ごとに更新される。また，種種の補正係数により，時々刻々の誤差をなるべく小さくするようにしている。地殻変動連続観測のように非常に精密な測位計算を行う場合には，オフラインで提供されるより精密なものが使われる。

パラメ - タ - の値を以下に記す。

$$\text{暦発行時の GPS 時刻： } t^* = 4.463840000000 \times 10^5 \text{ s}$$

$$\text{軌道長半径： } a = 2.656036871080 \times 10^7 \text{ m}$$

$$\text{離心率： } e = 1.285097794607 \times 10^{-3} \text{ (-)}$$

$$\text{暦発行時の平均近点角： } m^* = -2.600374102533 \times 10^{-1} \text{ rad}$$

$$\text{暦発行時の昇交点黄経： } \Omega = 2.367827949767 \text{ rad}$$

$$\text{暦発行時の軌道傾斜角： } i = 9.462618891145 \times 10^{-1} \text{ rad}$$

$$\text{暦発行時の近日点引数： } \mathbf{w} = 1.955675096095 \text{ rad}$$

まず，以上の数値から平均運動

$$n = \frac{\mathbf{m}^2 (1 - e^2)^{3/2}}{h^3} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{a^3}} \quad (3.19)$$

を求める。つぎに，ケプラー方程式

$$(u - e \sin u) = n(t - t_0) \quad (3.18)$$

より，離心近点角  $u$  を繰り返し計算で求める。すると，軌道面内の座標  $x, y$ ，動径  $r$  および真近点離角  $f$  は

$$x = a(\cos u - e) \quad (3.14a)$$

$$y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u \quad (3.14b)$$

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (3.15a)$$

$$f = \tan^{-1}(y/x) \quad (3.15b)$$

より求まる。

最後に地球固定座標  $X_E, Y_E, Z_E$  を求めることになるが，本節では行わない。計算結果を，図 5.1 に示す。

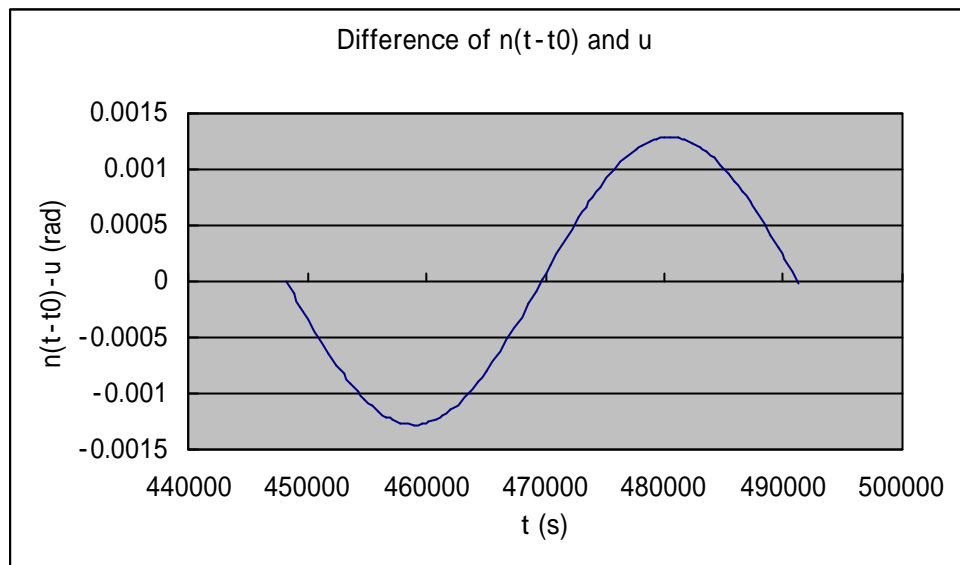


図 5.1a 平均運動からのずれ

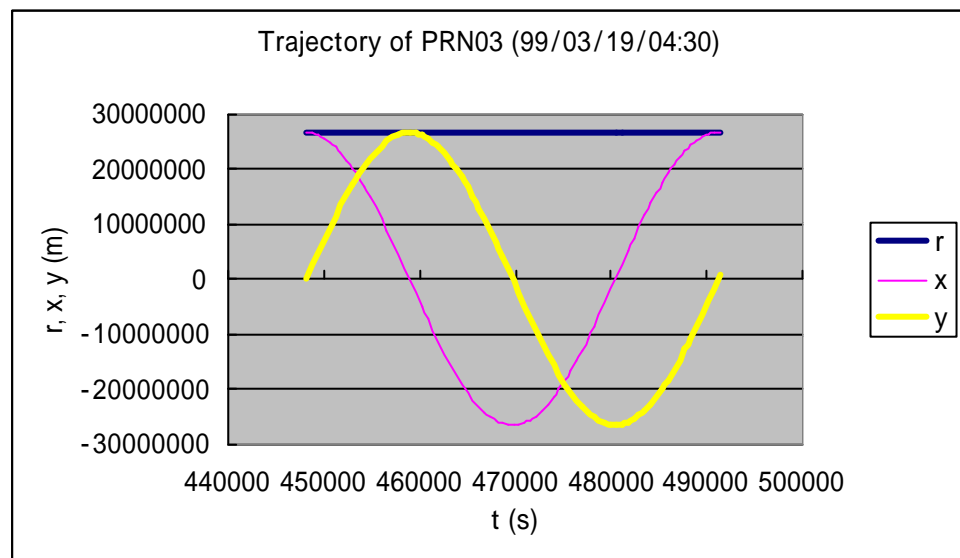


図 5.1b 軌道面内座標  $x, y$  と動径  $r$

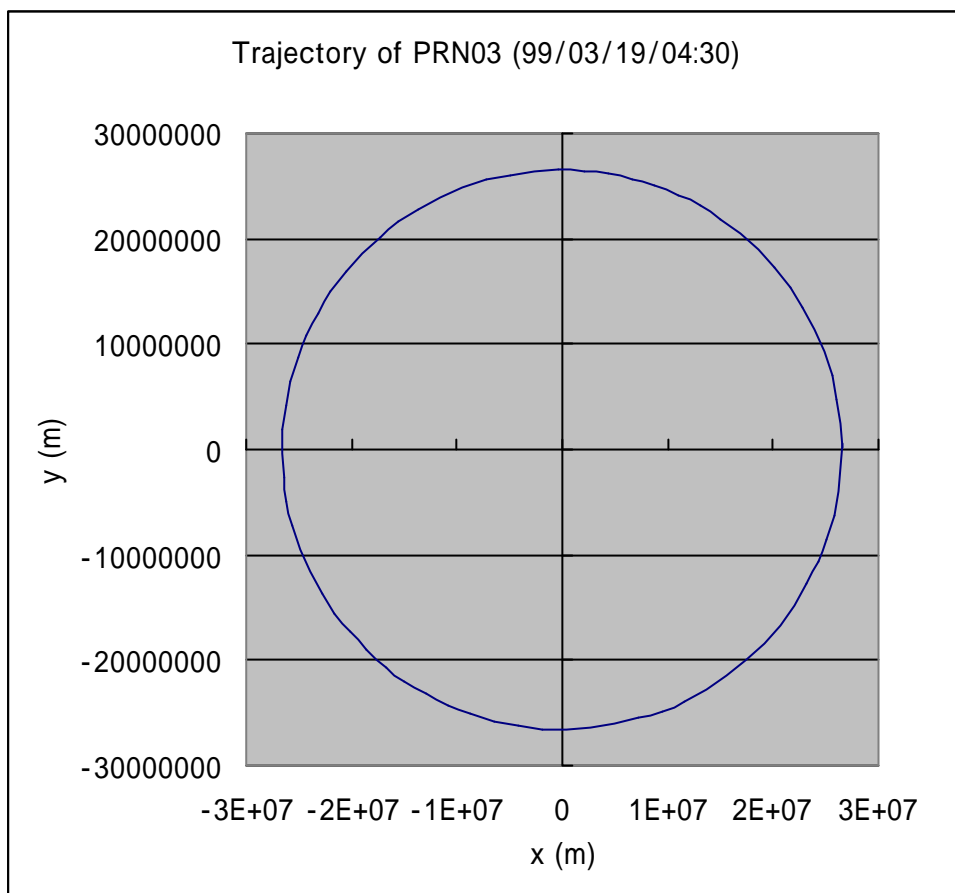


図 5.1c 衛星の軌道面内軌跡

6 . 衛星運動の計算例 2 (補正項を考慮する計算)

本節では ,GPS 衛星の位置を実際に求めるために行われる計算例を示す。2001 年 6 月 4 日に観測したデータの航法メッセージとその内容を , 表 6. 1 と表 6.2 に示す。

表 6.1 2001 年 6 月 4 日阪大データ (航法メッセージ : 52251550x.01N)

2	NAVIGATION DATA				RINEX VERSION / TYPE				
DAT2RIN 2.35a	NAOE				21JUN01 12:52:40 GMTPGM / RUN BY / DATE				
COMMENT									
.1583D-07	.2235D-07	-.1192D-06	-.1192D-06	ION ALPHA					
.1126D+06	.1475D+06	-.1311D+06	-.3932D+06	ION BETA					
.239808173319D-13	.838190317154D-08	233472		93 DELTA-UTC: A0,A1,T,W					
13					LEAP SECONDS				
END OF HEADER									
1	1	6	4	2	0	0.0	.180449336767D-03	.159161572810D-11	.000000000000D+00
							.186000000000D+03	.206250000000D+02	.457626204825D-08
							.112503767014D-05	.512423121836D-02	.915862619877D-05
							.936000000000D+05	.521540641785D-07	-.269597481593D+01
							.964713233047D+00	.207625000000D+03	-.169859422426D+01
							.666099174276D-09	.100000000000D+01	.111700000000D+04
							.100000000000D+01	.000000000000D+00	-.325962901115D-08
							.933900000000D+05		.186000000000D+03
2	1	6	4	2	0	0.0	-.241724774241D-04	-.568434188608D-11	.000000000000D+00
							.187000000000D+03	.818750000000D+01	.506985403691D-08
									-.105145356805D+01

```

.517815351486D-06 .211782049155D-01 .101495534182D-04 .515367991066D+04
.936000000000D+05 .115483999252D-06 -.698892269794D+00 .553205609322D-06
.933070667556D+00 .170406250000D+03 -.203990044670D+01 -.834284751309D-08
-.649669918503D-09 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.100000000000D+01 .000000000000D+00 -.139698386192D-08 .699000000000D+03
.933600000000D+05
4 1 6 4 2 0 0.0 .686026178300D-03 -.829913915368D-11 .000000000000D+00
.300000000000D+02 -.369062500000D+02 .429375028051D-08 .122448479598D+01
-.187009572983D-05 .543478119653D-02 .141933560371D-05 .515372161674D+04
.936000000000D+05 .931322574615D-07 .149639398394D+01 .633299350739D-07
.973624645340D+00 .356437500000D+03 -.406062866148D+00 -.826534428477D-08
-.115361948145D-09 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.000000000000D+00 .000000000000D+00 -.605359673500D-08 .300000000000D+02
.933600000000D+05
7 1 6 4 2 0 0.0 .550328288227D-03 -.139834810398D-10 .000000000000D+00
.107000000000D+03 .124937500000D+03 .457983362560D-08 -.215349984646D+01
.648386776447D-05 .117111273576D-01 .659935176373D-05 .515372987938D+04
.936000000000D+05 .132247805595D-06 .394901756489D+00 -.115483999252D-06
.946520192171D+00 .247125000000D+03 -.202122218516D+01 -.798354683249D-08
.239295681911D-09 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.000000000000D+00 .000000000000D+00 -.186264514923D-08 .363000000000D+03
.933600000000D+05
11 1 6 4 2 0 0.0 .230688601732D-05 .113686837722D-12 .000000000000D+00
.230000000000D+02 -.202812500000D+02 .563273462601D-08 -.989573692768D+00
-.108405947685D-05 .102968292776D-02 .707805156708D-07 .515371987724D+04
.936000000000D+05 .100582838058D-06 .142431563127D+01 .186264514923D-08
.921564053219D+00 .354468750000D+03 -.274203275966D+01 -.895001566122D-08
-.478591363823D-10 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.100000000000D+01 .000000000000D+00 -.838190317154D-08 .230000000000D+02
.933600000000D+05
13 1 6 4 2 0 0.0 -.224867835641D-05 -.341060513165D-12 .000000000000D+00
.180000000000D+02 .186562500000D+02 .450518765915D-08 -.194037136963D+00
.109337270260D-05 .204431591555D-02 .890903174877D-05 .515375796509D+04
.936000000000D+05 -.186264514923D-07 -.271749389176D+01 -.428408384323D-07
.968916214244D+00 .214062500000D+03 -.101200699438D+00 -.792390149087D-08
.675028117631D-09 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.000000000000D+00 .000000000000D+00 -.116415321827D-07 .530000000000D+03
.933600000000D+05
20 1 6 4 2 0 0.0 -.747912563384D-04 -.250111042988D-11 .000000000000D+00
.190000000000D+02 -.108750000000D+03 .427160650099D-08 -.740154487182D+00
-.589527189732D-05 .219460215885D-02 .965781509876D-05 .515355507088D+04
.936000000000D+05 -.335276126862D-07 .251824663789D+01 .558793544769D-08
.961786912663D+00 .197625000000D+03 .207988670987D+01 -.791747265166D-08
.214294640518D-10 .100000000000D+01 .111700000000D+04 .000000000000D+00
.200000000000D+01 .000000000000D+00 -.651925802231D-08 .787000000000D+03
.933600000000D+05

```

表 6.2 ライネックス航法メッセ - ジファイルの内容

レコード番号	内容	フォーマット
(内容)		
1	フォ - マットのバ - ジョン番号	I6, 14X
	ファイルの種類	
任意	注釈	
2	先頭部分の終わり(END OF HEADER)	



(データ部)		
1	衛星の PRN 番号	I2
	時刻(年月日時分秒)	5I3, F5.1
	時計の補正係数( $a_{f0}, a_{f1}, a_{f2}$ )	3D19.12
2	放送暦の年齢( <i>IODE</i> ) (s)	3X, D19.12
	軌道長半径補正のための sin 項( $C_{rs}$ ) (m)	D19.12
	平均運動差( $\Delta n$ ) (rad/s)	D19.12
	$t_{0e}$ における平均近点離角( $M_0$ )	D19.12
3	$u$ の補正のための cos 項 ( $C_{uc}$ ) (rad)	3X, D19.12
	離新率( $e$ )	D19.12
	$u$ の補正のための sin 項 ( $C_{us}$ ) (rad)	D19.12
	軌道長半径の平方根( $\sqrt{A}$ ) ( $\sqrt{m}$ )	D19.12
4	放送暦の発行時刻(GPS 週の経過秒) ( $t_{0e}$ )	3X, D19.12
	軌道傾斜角補正のための cos 項 ( $C_{ic}$ ) (rad)	D19.12
	昇交点経度( $\Omega_0$ ) (rad)	D19.12
	軌道傾斜角補正のための sin 項 ( $C_{is}$ ) (rad)	D19.12
5	軌道傾斜角( $i_0$ ) (rad)	3X, D19.12
	軌道長半径補正のための cos 項( $C_{rc}$ ) (m)	D19.12
	近日点引数( $w$ ) (rad)	D19.12
	昇交点経度の変化率( $\Omega_0'$ ) (rad/s)	D19.12
6	軌道傾斜角の変化率( $i_0'$ ) (rad/s)	3X, D19.12
	L2 チャンネルのコ - ド	D19.12
	GPS 週番号	D19.12
	L2 コ - ドデ - タのフラグ	D19.12
7	衛星の精度と健康状態	3X, 2D19.12
	電離層群遅延時間(s)	D19.12
	時計情報の年齢(s)	D19.12
8	メッセ - ジの発行時刻, 3 つの予備	3X, 4D19.12

表 6.2 に与えられる航法メッセ - ジで与えられる軌道情報 (エフェメリス) を整理すると, 下記の項目からなる。

時刻に関連する要素

*IODE*                      軌道予報のエポック

$t_{0e}$                         軌道要素 (orbital elemnet) の基準時刻

軌道面上での衛星運動を決める要素

$M_0$                          $t_{0e}$  における平均近点離角 (mean anomaly)

$e$                             離心率 (eccentricity)

$\sqrt{A}$                         軌道長半径 (semi major axis) の平方根

軌道面の向きを決める要素

$\Omega_0$                       昇交点黄経 (right ascension of ascending node)

$i_0$	軌道傾斜角 (inclination)
$w$	近日点引数 (argument of perigee)
修正係数	
$\Omega_0'$	昇交点黄経の摂動
$\Delta_n$	平均運動の摂動
$i'$	軌道傾斜角の摂動
$C_{uc}$	黄経方向の変動補正項のコサインの係数
$C_{us}$	黄経方向の変動補正項のサインの係数
$C_{rc}$	軌道半径の変動補正項のコサインの係数
$C_{rs}$	軌道半径の変動補正項のサインの係数
$C_{ic}$	軌道傾斜角の変動補正項のコサインの係数
$C_{is}$	軌道傾斜角の変動補正項のサインの係数

さまざまな補正項があるのは、地球の重力場の不均衡、上層大気の抵抗、太陽の輻射圧、他天体（月、太陽、惑星）の引力による。GPS 衛星は高高度衛星であるので、大気の抵抗は小さい。

軌道計算には、この外に

$$m = \text{万有引力定数}(G) \times \text{地球質量}(E) = 3.986005 \times 10^{14} \text{ m}^3 / \text{s}^2$$

$$\Omega_e' = \text{地球自転速度} = 7.2921151467 \times 10^{-5} \text{ rad} / \text{s} \quad (\text{WGS-84})$$

が用いられる。

軌道要素の概略の数値は

$$A = 26600 \text{ km}$$

$$i_0 = 55 \text{ deg}$$

$$e = 0.003$$

$$\Omega_0' = 0.6 \cdot 10^{-8} \text{ rad} / \text{s}$$

である。離心率が小さいので、ほとんど円軌道である。他の数値は衛星ごとに異なる。

時刻  $t$  における衛星位置の計算は下記の手順で行う。

(1)  $t_{0e}$  からの経過時間  $t_k$

$$t_k = t - t_{0e}$$

(2) 平均近点離角  $M_k$

$$M_k = M_0 + nt_k$$

ここで、 $n$  は平均運動  $n_0$  によって

$$n = n_0 + \Delta_n$$

$$n_0 = \sqrt{\left(\frac{m}{A^3}\right)} = 2\pi/T$$

(3) ケプラー方程式から離心近点離角  $E_k$  (3 節の  $u$ )

$$E_k = M_k + e \sin E_k$$

この方程式は繰返し法で解く。一般に収束は速い。

(4) 真近点離角  $v_k$  (3節の  $f$ ) は下記のどの式から求めてもよい。

$$\sin v_k = \sqrt{1-e^2} \sin E_k / (1 - e \cos E_k)$$

$$\cos v_k = (\cos E_k - e) / (1 - e \cos E_k)$$

$$\tan v_k = \sqrt{1-e^2} \sin E_k / (\cos E_k - e)$$

(5) 動径  $S_k$  は下記のどの式から求めてもよい。

$$S_k = A(1 - e \cos E_k)$$

$$S_k = A(1 - e^2) / (1 + e \cos v_k)$$

(6) 補正後の軌道上衛星位置  $u_k$ , 動径  $r_k$ , 軌道傾斜角  $i_k$

$$u_k = \mathbf{f}_k + \mathbf{d}u_k$$

$$r_k = S_k + \mathbf{d}r_k$$

$$i_k = i_0 + i't_k + \mathbf{d}i_k$$

ここで, 軌道面上で昇交点から衛星までの回転角  $\mathbf{f}_k$  と補正量  $\mathbf{d}u_k, \mathbf{d}r_k, \mathbf{d}i_k$  は

$$\mathbf{f}_k = v_k + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{d}u_k = C_{uc} \cos 2\mathbf{f}_k + C_{us} \sin 2\mathbf{f}_k$$

$$\mathbf{d}r_k = C_{rc} \cos 2\mathbf{f}_k + C_{rs} \sin 2\mathbf{f}_k$$

$$\mathbf{d}i_k = C_{ic} \cos 2\mathbf{f}_k + C_{is} \sin 2\mathbf{f}_k$$

(7) 軌道面上の昇交点黄経を  $x'_k$  軸とする軌道面座標での衛星の座標 ( $x'_k, y'_k$ )

$$x'_k = r_k \cos u_k$$

$$y'_k = r_k \sin u_k$$

(8) 補正後の昇交点黄経  $\Omega_k$

$$\Omega_k = \Omega_0 + (\Omega_0' - \Omega_e') t_k - \Omega_e' t_{0e}$$

(9) 地球固定座標での座標 ( $x_k, y_k, z_k$ )

$$x_k = x'_k \cos \Omega_k - y'_k \cos i_k \sin \Omega_k$$

$$y_k = x'_k \sin \Omega_k + y'_k \cos i_k \cos \Omega_k$$

$$z_k = y'_k \sin i_k$$

表 6.1 の航法メッセージに基づいて実際に行った計算結果を表 6.3 に示す。

表 6.3 衛星運動の計算結果 (2001.06.04 ; PRN01 ; 地球固定座標)

Time	x	y	z
02: 00: 00	-25855948.248	-1716340.561	6063393.919
02: 00: 01	-25855228.235	-1716665.825	6066451.190
02: 00: 02	-25854507.861	-1716991.166	6069508.333
02: 00: 03	-25853787.124	-1717316.585	6072565.348
02: 00: 04	-25853066.026	-1717642.082	6075622.234
02: 00: 05	-25852344.566	-1717967.657	6078678.992
02: 00: 06	-25851622.744	-1718293.310	6081735.621
02: 00: 07	-25850900.560	-1718619.041	6084792.122
02: 00: 08	-25850178.015	-1718944.850	6087848.494

同じように航法メッセージで与えられる概略の軌道情報アルマナックは、全衛星のそれぞれについて

$e$	離心率
$t_{0e}$	軌道要素の基準時刻
$di$	$0.3p + di$ = 軌道傾斜角
$\Omega_0'$	昇交点黄経の摂動
$\sqrt{A}$	軌道長半径の平方根
$\Omega_0$	昇交点黄経
$w$	近日点引数 ( argument of perigee )
$M_0$	$t_{0e}$ における平均近点離角
$a_{f0}$	時計補正の 0 次項
$a_{f1}$	時計補正の 1 次項

である。衛星の出没や可視状況を知るには、これだけで十分である。

### 参考文献

- [1] 一色 浩, 「変分法」, <http://www.dab.hi-ho.ne.jp/isshiki/>, (2000) .
- [2] 長沢 工, 「天体力学入門 (上),(下)」, 地人書館, (1983)
- [3] 伏見康治, 「現代物理学を学ぶための古典力学」, 岩波書店, (1989)

### 付録 A 解析力学による解法

#### A1 ハミルトン (Hamilton) の原理と正準方程式

ある運動系の一般座標を  $q$ , 速度を  $\dot{q}$  とするとき, ラグランジュアン (Lagrangian) を

$$L(q, \dot{q}, t) = T(\dot{q}) - U(q, \dot{q}, t) \quad (\text{A1.1})$$

により定義する。例えば, 平衡点からの変位  $x$ , 質量  $m$ , ばね定数  $k$  の 1 次元の調和振動子の場合のラグランジュアンは

$$L(x, \dot{x}) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k x^2 \quad (\text{A1.2})$$

である。ハミルトンの原理とは、この系の運動が、変分問題

$$I[\mathbf{q}] = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \text{stationary} \quad (\text{A1.3a})$$

under

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{A1.3b})$$

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad (\text{A1.3c})$$

の解であることを主張する。

この変分問題の停留条件を調べると

$$\begin{aligned} 0 = \delta I &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \dot{\mathbf{q}} \right] dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \delta \mathbf{q} \right]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \delta \mathbf{q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \delta \mathbf{q} \right] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \delta \mathbf{q} dt \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

であるので、停留解がオイラ - (Euler) の方程式

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0, \quad t_0 < t < t_1 \quad (\text{A1.5})$$

を満たす。この条件は、自然条件 (natural condition) とも呼ばれる。

ここで、 $\dot{\mathbf{q}}$  を  $\mathbf{q}$  と

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}, \quad t_0 \leq t \leq t_1 \quad (\text{A1.6})$$

という関係にある独立な変数と考えると、ラグランジュの乗数 (Lagrange multiplier)  $\mathbf{p}$  を導入して、この条件を緩和する。

$$\begin{aligned} I^*[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}] &= I[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}] - \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) - \mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) \right] dt \end{aligned} \quad (\text{A1.7a})$$

under

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad (\text{A1.7b})$$

この変分原理は、(A1.3)式で与えられるハミルトンの原理を書きなおしたものに過ぎ

ず，まったく同等である。

停留条件を求めると

$$\begin{aligned}
 0 = \mathbf{d}I^* &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{d}\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{d}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} \cdot \left( \mathbf{d}\dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{d}\mathbf{q}}{dt} \right) - \mathbf{d}\mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) \right] dt \\
 &= [\mathbf{p} \mathbf{d}\mathbf{q}]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \mathbf{d}\mathbf{q} + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{p} \right) \mathbf{d}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d}\mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) \right] dt \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{p}}{dt} \right) \mathbf{d}\mathbf{q} + \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{p} \right) \mathbf{d}\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{d}\mathbf{p} \cdot \left( \dot{\mathbf{q}} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) \right] dt \tag{A1.8}
 \end{aligned}$$

であるので，自然条件は

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt} \tag{A1.9a}$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{A1.9b}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{A1.9c}$$

である。

ルジャンドル変換 ( Legendre transformation )

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \tag{A1.10a}$$

$$H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \tag{A1.10b}$$

によって，(A1.7)式で与えられる変分原理を拘束すると，新たに

$$\begin{aligned}
 J[\mathbf{q}, \mathbf{p}] &= I^*[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}]_{(A1.10)} \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt \tag{A1.11a}
 \end{aligned}$$

under

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \tag{A1.11b}$$

という変分原理を得る。停留条件を求めると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{d}J &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \mathbf{d}\mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \mathbf{p} \frac{d\mathbf{d}\mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \mathbf{d}\mathbf{q} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{d}\mathbf{p} \right] dt \\
 &= [\mathbf{p} \cdot \mathbf{d}\mathbf{q}]_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) \mathbf{d}\mathbf{p} - \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{d}\mathbf{q} \right] dt
 \end{aligned}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \right) d\mathbf{p} - \left( \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \right) d\mathbf{q} \right] dt \quad (\text{A1.12})$$

であるので，自然条件は

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \quad (\text{A1.13a})$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A1.13b})$$

である。この運動方程式のことを，正準方程式（canonical equation）と呼ぶ。

## A2 正準変換とその応用

作用積分を

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = \int_0^1 L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) \frac{dt}{ds} ds \quad (\text{A2.1})$$

で定義する。時間も含めた変分を考えると

$$\begin{aligned} dS &= \int_0^1 \left[ \mathbf{dL} \frac{dt}{ds} + L \mathbf{d} \left( \frac{dt}{ds} \right) \right] ds = \int_0^1 [\mathbf{dL} dt + L d(\mathbf{dt})] \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \mathbf{dL} + L \frac{d\mathbf{dt}}{dt} \right] dt = \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \mathbf{d} \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt + L \frac{d\mathbf{dt}}{dt} \right] dt \end{aligned} \quad (\text{A2.2})$$

となる。ここで

$$\begin{aligned} \mathbf{d} \left( \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) &= \mathbf{d} \left[ \frac{d\mathbf{q}}{ds} \left( 1 / \frac{dt}{ds} \right) \right] = \frac{d\mathbf{dq}}{ds} \left( 1 / \frac{dt}{ds} \right) - \frac{d\mathbf{q}}{ds} \left( 1 / \frac{dt}{ds} \right)^2 \frac{d\mathbf{dt}}{ds} \\ &= \frac{d\mathbf{dq}}{dt} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{d\mathbf{dt}}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

であるので，これを(A2.2)式に代入すると

$$\begin{aligned} dS &= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \left( \frac{d\mathbf{dq}}{dt} - \frac{d\mathbf{q}}{dt} \frac{d\mathbf{dt}}{dt} \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt + L \frac{d\mathbf{dt}}{dt} \right] dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} dt + L dt \right]_{t_0}^{t_1} \\ &\quad + \int_{t_0}^{t_1} \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) d\mathbf{q} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) dt + \frac{\partial L}{\partial t} dt - \frac{dL}{dt} dt \right] dt \\ &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} dt + L dt \right]_{t_0}^{t_1} \end{aligned}$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] d\mathbf{q} + \left[ \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) \right] dt \right\} dt \quad (\text{A2.4})$$

となる。

力学的に可能な運動  $S = S(\mathbf{q}_0, t_0; \mathbf{q}_1, t_1)$  を考えると

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = 0 \quad (\text{A1.5})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial t} - \frac{d}{dt} \left( L - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} \right) &= -\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \dot{\mathbf{q}} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} + \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) \right] \dot{\mathbf{q}} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \ddot{\mathbf{q}} \\ &= \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \right] \dot{\mathbf{q}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A2.5})$$

であるので, (A1.10)式とこの式を(A2.4)式に代入すると

$$\begin{aligned} dS &= \left[ \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} d\mathbf{q} - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} dt + L dt \right]_{t_0}^{t_1} = [\mathbf{p} d\mathbf{q} - H dt]_{t_0}^{t_1} \\ &= (\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1 - H_1 dt_1) - (\mathbf{p}_0 d\mathbf{q}_0 - H_0 dt_0) \end{aligned} \quad (\text{A2.6})$$

となる。これより

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1}, \quad H_1 = -\frac{\partial S}{\partial t_1} \quad (\text{A2.7a})$$

$$\mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0}, \quad H_0 = \frac{\partial S}{\partial t_0} \quad (\text{A2.7b})$$

が求まる。

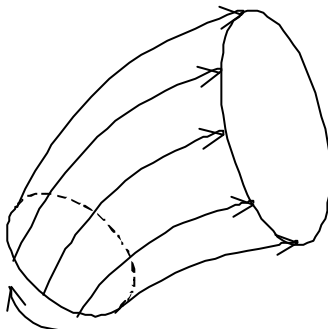


図 A1.1 周積分

したがって, 図 A1.1 に示されるような周積分を考えると

$$\oint (\mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1 - H_1 dt_1) = \oint (\mathbf{p}_0 d\mathbf{q}_0 - H_0 dt_0) \quad (\text{A2.8})$$

がいえる。すなわち, 閉曲線積分の値は一定



$$\oint (\mathbf{p}d\mathbf{q} - Hdt) = const \quad (\text{A2.9})$$

となる。

$dt=0$  の場合を考えると、(A2.6)式は

$$dS = \mathbf{p}_1 d\mathbf{q}_1 - \mathbf{p}_0 d\mathbf{q}_0 \quad (\text{A2.10})$$

となり、(A2.7)式は

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_1} \quad (\text{A2.11a})$$

$$\mathbf{p}_0 = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}_0} \quad (\text{A2.11b})$$

となる。(A2.10)式あるいは(A2.11)式は、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$  から  $\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1$  への変換を定義している。しかも、 $\mathbf{q}_0, \mathbf{p}_0$  と  $\mathbf{q}_1, \mathbf{p}_1$  は実現可能な運動上の 1 点であるから、正準方程式(A1.13)式を満足している。このような変換を正準変換という。

この考えを一般化する。下記により  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  から  $\mathbf{P}, \mathbf{Q}$  への変換を定義する。

$$\mathbf{P}d\mathbf{Q} = \mathbf{p}d\mathbf{q} + dS(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \quad (\text{A2.12})$$

$S$  を変換の母関数という。(A2.12)式から

$$\mathbf{P} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{Q}} \quad (\text{A2.13a})$$

$$\mathbf{p} = -\frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A2.13b})$$

がいえる。 $S$  に  $t$  が含まれている場合も含めると

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} &= \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{Q}, t)}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \\ &= \left( \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{Q}} \frac{d\mathbf{Q}}{dt} \right) - \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} \frac{d\mathbf{q}}{dt} \\ &= \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{dS}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A2.14})$$

が成り立つ。したがって

$$H(\mathbf{Q}, \mathbf{P}, t) = H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \frac{\partial S}{\partial t} \quad (\text{A2.15})$$

とすると、変分原理

$$J[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = I^*[\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{p}] \Big|_{(A1.10)}$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} \left[ \mathbf{p} \frac{d\mathbf{q}}{dt} - H(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \right] dt \quad (\text{A1.11a})$$

under

$$\mathbf{q}(t_0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{q}_1 \quad (\text{A1.11b})$$

において,  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  から  $\mathbf{Q}, \mathbf{P}$  に変換しても形が変わらないので

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{P}} \quad (\text{A2.16a})$$

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{Q}} \quad (\text{A2.16b})$$

が成立するので, (A2.12)式あるいは(A2.13)式の変換は正準変換である。

(A2.12)式の母関数  $S$  は  $\mathbf{q}, \mathbf{Q}$  の関数であるが, 別の形の母関数を考えることができる。すなわち

$$\mathbf{P} d\mathbf{Q} = \mathbf{p} d\mathbf{q} + dS(\mathbf{q}, \mathbf{Q}) \quad (\text{A2.12})$$

に

$$\mathbf{P} d\mathbf{Q} = d(\mathbf{P}\mathbf{Q}) - \mathbf{Q} d\mathbf{P} \quad (\text{A2.17})$$

を代入すると

$$\mathbf{Q} d\mathbf{P} = -\mathbf{p} d\mathbf{q} + d[\mathbf{P}\mathbf{Q} - S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})] \quad (\text{A2.18})$$

を得る。(A2.13a)式を用いて  $\mathbf{P}\mathbf{Q} - S(\mathbf{q}, \mathbf{Q})$  を, 改めて  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  とすると

$$\mathbf{Q} d\mathbf{P} = -\mathbf{p} d\mathbf{q} + dS(\mathbf{q}, \mathbf{P}) \quad (\text{A2.19})$$

$$\mathbf{p} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{q}} \quad (\text{A2.19a})$$

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S(\mathbf{q}, \mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} \quad (\text{A2.19b})$$

となる。

変換されたハミルトニアンが  $\mathbf{Q}$  を含まないような変換を考えると, 正準方程式 (A2.16b)式の右辺は零であるので, 簡単に積分できる。すなわち, (A2.16b)式から

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}_0 \quad (\text{A2.20a})$$

$\mathbf{P}$  は定数  $\mathbf{P}_0$  になるが, 導かれるとともに, (A2.16a)式の右辺は定数になるので

$$\mathbf{Q} = H_{\mathbf{p}}(\mathbf{P}_0)t + \mathbf{Q}_0 \quad (\text{A2.20b})$$

となる。 $\mathbf{P}_0, \mathbf{Q}_0$  は積分定数である。要するに, 6 個の積分が得られたので完全に解けたことになる。

$\mathbf{Q}$  を含まないような変換は, (A2.16b)式より,  $\mathbf{P}$  が定数になることと同じことを意味する。通常, 全エネルギー - 角運動量の大きさ, 角運動量の  $z$  成分が用いられる。

【例】調和振動子：質量を  $m$  ，ばね定数を  $k$  ，質点の変位を  $q$  ，運動量を  $p$  とすると，  $H$  は

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \quad (\text{A2.21})$$

である。  $P$  として全エネルギー  $E$

$$E = H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2 \quad (\text{A2.22})$$

をとると，(A2.22)式から

$$p = \sqrt{2m \left( E - \frac{k}{2} q^2 \right)} \quad (\text{A2.23})$$

と書ける。

(A.2.19)式から，この場合の変換の母関数は

$$S = S(q, E) = \int \frac{\partial S}{\partial q} dq = \int p dq = \int \sqrt{2m \left( E - \frac{k}{2} q^2 \right)} dq \quad (\text{A2.24})$$

であるので，(A.2.19b)式から，この場合の  $Q$  は

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \int \frac{m}{\sqrt{2m \left( E - \frac{k}{2} q^2 \right)}} dq = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) \quad (\text{A2.25})$$

となる。

一方，正準方程式(A2.16)式から

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\partial H}{\partial E} = 1 \quad (\text{A2.26})$$

となるので

$$Q = t + \mathbf{f} \quad (\text{A2.27})$$

となる。

したがって，(A2.25)式と(A2.27)式から

$$Q = \sqrt{\frac{m}{k}} \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) = t + \mathbf{f} \quad (\text{A2.28})$$

であるので，これより

$$q = \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin \left( \sqrt{\frac{k}{m}} (t + \mathbf{f}) \right) \quad (\text{A2.29})$$

が求まる。

### A3 正準変換による惑星運動の解

正準運動量を  $P_1, P_2, P_3$  として

$$P_1 = \sqrt{\frac{m}{-2E}} \quad (\text{A3.1a})$$

$$P_2 = L \quad (\text{A3.1b})$$

$$P_3 = L_z \quad (\text{A3.1c})$$

を考える。ここで、 $E$  は全エネルギー、 $L$  は角運動量の大きさ、 $L_z$  は角運動量の  $z$  成分である。これらを正準運動量  $p_r, p_q, p_f$  および座標  $r, \mathbf{q}, \mathbf{f}$  の関数として、具体的に書くと

$$-\frac{m}{2P_1^2} = E = \frac{1}{2} \left( p_r^2 + \frac{p_q^2}{r^2} + \frac{p_f^2}{r^2 \sin^2 \mathbf{q}} \right) - \frac{m}{r} \quad (\text{A3.2a})$$

$$P_2 = L = \sqrt{p_q^2 + \frac{p_f^2}{\sin^2 \mathbf{q}}} \quad (\text{A3.2b})$$

$$P_3 = L_z = p_f \quad (\text{A3.2c})$$

であるので、これより

$$p_r = \sqrt{-\frac{m}{P_1^2} + \frac{2m}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}} \quad (\text{A3.3a})$$

$$p_q = \sqrt{P_2^2 - \frac{P_3^2}{\sin^2 \mathbf{q}}} \quad (\text{A3.3b})$$

$$p_f = P_3 \quad (\text{A3.3c})$$

が求まる。

上の式で用いた運動量  $p_r, p_q, p_f$  は正準運動量である。すなわち、一般座標  $\mathbf{q} = (r, \mathbf{q}, \mathbf{f})$  を用いてラグランジュアン  $L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  を

$$L = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\mathbf{q}}^2 + r^2 \dot{\mathbf{f}}^2 \sin^2 \mathbf{q}) - U \quad (\text{A3.4})$$

として

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \dot{r} \quad (\text{A3.5a})$$

$$p_q = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = r^2 \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A3.5b})$$

$$p_f = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{f}}} = r^2 \dot{\mathbf{f}} \sin^2 \mathbf{q} \quad (\text{A3.5c})$$

であり，普通用いる速度の球座標成分  $v = (v_r, v_q, v_f) = (\dot{r}, r\dot{\mathbf{q}}, r\dot{\mathbf{f}}\sin \mathbf{q})$  とは

$$p_r = v_r \quad (\text{A3.6a})$$

$$p_q = rv_q \quad (\text{A3.6b})$$

$$p_f = rv_f \sin \mathbf{q} \quad (\text{A3.6c})$$

である。

この後の手順は前節の例題で取り上げた調和振動子の場合と基本的に同じである。まず母関数  $S(\mathbf{q}, \mathbf{P})$  を

$$S = \int \frac{\partial S}{\partial \mathbf{q}} d\mathbf{q} = \int \mathbf{p} d\mathbf{q} \quad (\text{A3.7})$$

より求めて

$$\mathbf{Q} = \frac{\partial S}{\partial \mathbf{P}} \quad (\text{A3.8})$$

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \frac{\partial H(\mathbf{P})}{\partial \mathbf{P}} = \text{const} \quad (\text{A3.9})$$

により，問題を解く。

$Q_1$ からはケプラー運動の方程式が導かれ， $Q_2$ および $Q_3$ はそれぞれ近日点引数  $w$ および昇交点黄経  $\Omega$ に等しいことが示される。

まず，(A3.7)式から母関数  $S$ は

$$\begin{aligned} S &= \int p_r dr + \int p_q d\mathbf{q} + \int p_f d\mathbf{f} \\ &= \int \sqrt{-\frac{\mathbf{m}^2}{P_1^2} + \frac{2\mathbf{m}}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}} dr + \int \sqrt{P_2^2 - \frac{P_3^2}{\sin^2 \mathbf{q}}} d\mathbf{q} + P_3 \mathbf{f} \end{aligned} \quad (\text{A3.10})$$

となる。

これより， $Q_1$ は

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\partial S}{\partial P_1} = \frac{\partial}{\partial P_1} \int \sqrt{-\frac{\mathbf{m}^2}{P_1^2} + \frac{2\mathbf{m}}{r} - \frac{P_2^2}{r^2}} dr \\ &= \int \frac{\frac{\mathbf{m}}{P_1^2} r}{\sqrt{-r^2 + \frac{2P_1^2}{\mathbf{m}} r - \frac{P_1^2 P_2^2}{\mathbf{m}^2}}} dr \end{aligned}$$

$$= \frac{\mathbf{m}}{P_1^2} \int \frac{r}{\sqrt{(r-r_1)(r_2-r)}} dr \quad (\text{A3.11})$$

と求まる。ここで

$$r_1 = a(1-e) \quad (\text{A3.12a})$$

$$r_2 = a(1+e) \quad (\text{A3.12b})$$

$$a = \frac{P_1^2}{\mathbf{m}} \quad (\text{A3.13a})$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{P_2^2}{P_1^2}} \quad (\text{A3.13b})$$

とする。 $a, e$  は最終的に楕円の長半径, 離心率になる。

(A3.11)式において

$$r = a(1 - e \cos u) \quad (\text{A3.14})$$

と変換すると

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\mathbf{m}}{P_1^2} \int \frac{a(1-e \cos u) a e \sin u du}{\sqrt{[a(1-e \cos u) - a(1-e)][a(1+e) - a(1-e \cos u)]}} \\ &= \frac{\mathbf{m}}{P_1^2} \int a(1-e \cos u) du = u - e \sin u \end{aligned} \quad (\text{A3.15})$$

となる。

一方,

$$H = E = -\frac{\mathbf{m}^2}{2P_1^2} \quad (\text{A3.16})$$

であるので

$$\frac{dQ_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial P_1} = \frac{\mathbf{m}^2}{P_1^3} = \sqrt{\frac{\mathbf{m}}{a^3}} = \text{const} = n \quad (\text{A3.17})$$

とすると, (A3.9)式から

$$u - e \sin u = nt + t_0 \quad (\text{A3.18})$$

となる。これはケプラー運動の方程式に他ならない。また,  $n$  は平均運動であることが分かる。

$Q_2$  および  $Q_3$  は, それぞれ近日点引数  $w$  および昇交点黄経  $\Omega$  に等しいことが示されるが, 参考文献[2]を参照されたい。以上の変換をまとめると

$$P_1 = na^2, \quad Q_1 = nt + t_0 \quad (\text{A3.19a})$$

$$P_2 = na^2\sqrt{1-e^2}, \quad Q_2 = \mathbf{w} \quad (\text{A3.19b})$$

$$P_3 = na^2\sqrt{1-e^2} \cos i, \quad Q_3 = \Omega \quad (\text{A3.19c})$$

となるが，天文学では(A3.19)式で結ばれた変数  $(P_1, P_2, P_3, Q_1, Q_2, Q_3)$  をドローネイの正準変数 (Delaunay's canonical variables) と呼ぶ。

## 付録 B 展開式

以上に述べた理論により 2 体問題は完全に解けることが分かった。また，解に含まれている定数が与えられ時間が指定されれば，惑星の位置を計算することができる。しかし，このような解は理論的な検討を加える上では，見通しのよい解とはいえない。例えば，ケプラー - の方程式

$$u - e \sin u = n(t - t_0) \quad (\text{B.1})$$

の数値的な解は簡単に求められるが

$$u = u(t) \quad (\text{B.2})$$

の形で解が与えられると，大変便利である。

そのような目的のためには，展開式を使うのが一つの方法である。地球を周回する人工衛星の場合などでは，衛星の質量は地球の質量に比べてはるかに小さいので離心率は非常に小さく，軌道はほぼ真円なる。このことを利用すると，(B.2)式の形の解を求めることができる。

まず

$$u - e \sin u = l \quad (\text{B.3})$$

と置いて

$$s = u - l \quad (\text{B.4})$$

とすると

$$s = e \sin(s + l) \quad (\text{B.5})$$

と書ける。ここで

$$s = es_1(l) + e^2s_2(l) + e^3s_3(l) + \dots \quad (\text{B.6})$$

と置く。一方，(B.5)式を

$$s = e \sin s \cos l + e \cos s \sin l \quad (\text{B.7})$$

書き直しておく。  $\sin s$  と  $\cos s$  のテ - ラ - 展開

$$\sin s = s - \frac{s^3}{3!} + \frac{s^5}{5!} - \dots \quad (\text{B.8a})$$

$$\cos s = 1 - \frac{s^2}{2!} + \frac{s^4}{4!} - \dots \quad (\text{B.8b})$$

に，(B.6)式を代入すると

$$\sin s = e s_1 + e^2 s_2 + e^3 \left( s_2 - \frac{1}{6} s_1^3 \right) + e^4 \left( s_4 - \frac{1}{2} s_1^2 s_2 \right) + \dots \quad (\text{B.9a})$$

$$\cos s = 1 - \frac{1}{2} e^2 s_1^2 - e^3 s_1 s_2 + e^4 \left( -\frac{1}{2} s_2^2 - s_1 s_3 + \frac{1}{24} s_1^4 \right) + \dots \quad (\text{B.9b})$$

を得る。(B.6)式と(B.9)式を(B.7)式に代入すると

$$s_1 = \sin l \quad (\text{B.10a})$$

$$s_2 = s_1 \cos l \quad (\text{B.10b})$$

$$s_3 = s_2 \cos l - \frac{1}{2} s_1^2 \sin l \quad (\text{B.10c})$$

$$s_4 = \left( s_3 - \frac{1}{6} s_1^3 \right) \cos l - s_1 s_2 \sin l \quad (\text{B.10d})$$

$$s_5 = \left( s_4 - \frac{1}{2} s_1^2 s_2 \right) \cos l + \left( -\frac{1}{2} s_2^2 - s_1 s_3 + \frac{1}{24} s_1^4 \right) \sin l \quad (\text{B.10e})$$

.....

が求まる。

(B.10)式を書きなおすと

$$s_1 = \sin l \quad (\text{B.11a})$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \sin 2l \quad (\text{B.11b})$$

$$s_3 = -\frac{1}{8} \sin l + \frac{3}{8} \sin 3l \quad (\text{B.11c})$$

$$s_4 = -\frac{1}{6} \sin 2l + \frac{1}{3} \sin 4l \quad (\text{B.11d})$$

$$s_5 = \frac{1}{192} \sin l - \frac{27}{128} \sin 3l + \frac{125}{384} \sin 5l \quad (\text{B.11e})$$

.....

となる。これらの式を(B.6)式に代入すると

$$\begin{aligned} s &= e \sin l + \frac{1}{2} e^2 \sin 2l + e^3 \left( -\frac{1}{8} \sin l + \frac{3}{8} \sin 3l \right) \\ &+ e^4 \left( -\frac{1}{6} \sin 2l + \frac{1}{3} \sin 4l \right) \\ &+ e^5 \left( \frac{1}{192} \sin l - \frac{27}{128} \sin 3l + \frac{125}{384} \sin 5l \right) + \dots \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$



と書ける。この結果を(B.4)式に代入すると

$$\begin{aligned}
u = l &+ \left( e - \frac{1}{8}e^3 + \frac{1}{192}e^5 + \dots \right) \sin l \\
&+ \left( \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{6}e^4 + \dots \right) \sin 2l + \left( \frac{3}{8}e^3 - \frac{27}{128}e^5 + \dots \right) \sin 3l \\
&+ \left( \frac{1}{3}e^4 + \dots \right) \sin 4l + \left( \frac{125}{384}e^5 + \dots \right) \sin 5l + \dots
\end{aligned} \tag{B.13}$$

を得る。同様にして

$$\begin{aligned}
\frac{r}{a} &= \left( 1 + \frac{1}{2}e^2 \right) + \left( -e + \frac{3}{8}e^3 - \frac{5}{192}e^5 + \dots \right) \cos l \\
&+ \left( -\frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^4 + \dots \right) \cos 2l + \left( -\frac{3}{8}e^3 + \frac{45}{128}e^5 + \dots \right) \cos 3l \\
&+ \left( -\frac{1}{3}e^4 + \dots \right) \cos 4l + \left( -\frac{125}{384}e^5 + \dots \right) \cos 5l + \dots
\end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{x}{a} &= -\frac{3}{2}e + \left( 1 - \frac{3}{8}e^2 + \frac{5}{192}e^4 + \dots \right) \cos l \\
&+ \left( \frac{1}{2}e - \frac{1}{3}e^3 + \dots \right) \cos 2l + \left( \frac{3}{8}e^2 - \frac{45}{128}e^4 + \dots \right) \cos 3l \\
&+ \left( \frac{1}{3}e^3 + \dots \right) \cos 4l + \left( \frac{125}{384}e^4 + \dots \right) \cos 5l + \dots
\end{aligned} \tag{B.15}$$

$$\begin{aligned}
\frac{y}{a} &= \left( 1 - \frac{5}{8}e^2 - \frac{11}{192}e^4 + \dots \right) \sin l \\
&+ \left( \frac{1}{2}e - \frac{5}{12}e^3 + \dots \right) \sin 2l + \left( \frac{3}{8}e^2 - \frac{51}{128}e^4 + \dots \right) \sin 3l \\
&+ \left( \frac{1}{3}e^3 + \dots \right) \sin 4l + \left( \frac{125}{328}e^4 + \dots \right) \sin 5l + \dots
\end{aligned} \tag{B.16}$$

$$\begin{aligned}
f &= l + \left( 2e - \frac{1}{4}e^3 + \dots \right) \sin l \\
&+ \left( \frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \dots \right) \sin 2l + \left( \frac{13}{12}e^3 + \dots \right) \sin 3l \\
&+ \left( \frac{103}{96}e^4 + \dots \right) \sin 4l + \dots
\end{aligned} \tag{B.17}$$

が求まる。これらの式の導出は、参考文献[2]に詳しく述べられている。