2002.08.05，2003.03.18-03.31 07.05 07.09 07.22
一色

最小二乗法と統計的推定

［**要約**］GPS の理論を正しく理解するためには，最小二乗法の数理統計的な本質を正しく理解していることが不可欠である。この問題に対するよい参考文献が見当たらないので，末尾記載の参考文献（[1]の第 5 章）を基にしてまとめてみた。

主要な内容を以下に列記する。

観測方程式：

$$\{l*\}=[a]\{x\}+\{\boldsymbol{e}\} \tag{1.11}$$

最小二乗法：

$$\{\boldsymbol{e}\}^T[p]\{\boldsymbol{e}\}=\min \tag{1.17}$$

正規方程式：

$$[N]\{\hat{x}\}=\{U\} \tag{1.23}$$

未知量物理量の推定値：

$$\{\hat{x}\}=[N]^{-1}\{U\}=\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l*\} \tag{1.24}$$

観測誤差の推定値：

$$\{\hat{\boldsymbol{e}}\}=\{l*\}-[a]\{\hat{x}\} \tag{1.25}$$

観測誤差の分散：

$$E\left\langle\{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T\right\rangle=\left[E\left\langle\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right\rangle\right]=\boldsymbol{s}_0{}^2[p]^{-1} \tag{2.2}$$

単位重量分散の推定値：

$$\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2=\frac{\{\hat{\boldsymbol{e}}\}^T[p]\{\hat{\boldsymbol{e}}\}}{n-m} \tag{2.20}$$

未知物理量の分散の推定値：

$$\hat{\boldsymbol{s}}_{x_i}^2=\hat{\boldsymbol{s}}_0^2[N]^{-1}{}_{ii} \tag{3.8a}$$

未知物理量の信頼域：

$$\hat{x}_i-t_{a/2}\sqrt{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2[N]^{-1}{}_{ii}}<x_i<\hat{x}_i+t_{a/2}\sqrt{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2[N]^{-1}{}_{ii}} \tag{4.14}$$

１．観測方程式と最小二乗法による未知物理量の推定

観測量の真値 $l_i,\ i=1,2,\cdots,n$，未知物理量の真値 $x_j,\ j=1,2,\cdots,m$ との間に

$$l_i=f_i(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_m)\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.1}$$

という関係が成立するものとする。これを数学モデル（mathematical model）と呼ぶ。

l_i を観測して得た値を l_i* とし，観測誤差を $\boldsymbol{e}_i$ とする。すなわち

$$l_i*=l_i+\boldsymbol{e}_i\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.2}$$

とする。(1.2)式を(1.1)式に代入すると

$$l_i*=f_i(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,\ x_m)+\boldsymbol{e}_i\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.3}$$

となる。

(1.3)式を線形化する。そのために，未知物理量x_jの近似値を$x_j^{\ 0}$，補正量をΔx_jとする。すなわち

$$x_j = x_j^{\ 0} + \Delta x_j \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,m) \tag{1.4}$$

とすると

$$\begin{aligned} f_i(x_1,\, x_2,\cdots\cdots,\, x_m) &= f_i\left(x_1^{\ 0},\, x_2^{\ 0},\cdots\cdots,\, x_m^{\ 0}\right) \\ &+\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_1}\right)_0 \Delta x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_2}\right)_0 \Delta x_2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_m}\right)_0 \Delta x_m \end{aligned} \tag{1.5}$$

であるので

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 = a_{ij} \tag{1.6}$$

とすると，(1.3)式は

$$l_i{}^* = l_i^{\ 0} + \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta x_j + \boldsymbol{e}_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.7}$$

で近似される。ここで

$$l_i^{\ 0} = f_i\left(x_1^{\ 0},\, x_2^{\ 0},\cdots\cdots,\, x_m^{\ 0}\right) \tag{1.8}$$

である。書き直すと

$$\left(l_i{}^* - l_i^{\ 0}\right) = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}\Delta x_j + \boldsymbol{e}_i \qquad i=1,2,\cdots,n \tag{1.9}$$

となる。(1.3)式，(1.7)式および(1.9)式を観測方程式（observation equation）という。

行列を用いると，(1.7)式は

$$\{l^* - l^0\} = [a]\{\Delta x\} + \{\boldsymbol{e}\} \tag{1.10}$$

と書ける。ここで，$\{\bullet\}$は列ベクトルを，$[\bullet]$は行列を表す。行列$[a]$を計画行列（design matrix）と呼ぶ。

以下においては，$l^* - l^0$，Δxをl^*，xと書くことにする。すなわち，(1.10)式を

$$\{l^*\} = [a]\{x\} + \{\boldsymbol{e}\} \tag{1.11}$$

と書くことにする。この方程式において，未知数は$\{x\}$と$\{\boldsymbol{e}\}$である。未知数の数は$m+n$個であるのに対して，方程式の数はn個しかないから，普通の意味では未知物理量を決定できない。

そこで，最小二乗法を用いて，$\{x\}$ と $\{e\}$ の推定を行う。その前提として，以下の準備を行う。

n 個の観測値の誤差が独立で，その分散を $s_1{}^2, s_2{}^2, \cdots, s_n{}^2$ とし，単位重量分散 $s_0{}^2$ と重み $p_1, p_2, \cdots, p_n$ を用いて

$$s_i{}^2 = \frac{s_0{}^2}{p_i} \quad (i = 1, 2, \cdots\cdots, n) \tag{1.12}$$

とする。$\sqrt{p_i}$ を観測方程式の両辺に掛けると

$$\sqrt{p_i}\, l_i * = \sum_{j=1}^{m} \sqrt{p_i} a_{ij} x_j + \sqrt{p_i} e_i \qquad i = 1, 2, \cdots, n \tag{1.13}$$

となるが，この観測方程式を用いると，観測誤差 $\sqrt{p_i} e_i$ の分散がすべて $p_i s_i{}^2 = s_0{}^2$ に等しくなる。

(1.13)式を行列を用いて書くことにする。そのために

$$[p] = \begin{bmatrix} p_{11} & & & & \\ & & & & 0 \\ & p_{22} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & p_{nn} \end{bmatrix} \tag{1.14a}$$

および

$$[p^{\frac{1}{2}}] = \begin{bmatrix} \sqrt{p_{11}} & & & & \\ & & & & 0 \\ & \sqrt{p_{22}} & & & \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & \ddots & \\ & & & & \sqrt{p_{nn}} \end{bmatrix} \tag{1.14b}$$

とする。ここで

$$p_{ii} = p_i \tag{1.15}$$

としている。(1.14)式を用いて，(1.13)式を書き直すと

$$[p^{1/2}]\{l*\} = [p^{1/2}][a]\{x\} + [p^{1/2}]\{e\} \tag{1.16}$$

を得る。

最小二乗法では，未知数 $\{x\}$ と $\{e\}$ は，最小値問題

$$\left([p^{1/2}]\{e\}\right)^T [p^{1/2}]\{e\} = \{e\}^T [p]\{e\} = \min \tag{1.17}$$

の解と考える。上付き添え字Tは転置を表す。(1.11)式を代入すると

$$\begin{aligned}\{e\}^T[p]\{e\} &= ([a]\{x\}-\{l^*\})^T[p]([a]\{x\}-\{l^*\})\\ &= (\{x\}^T[a]^T-\{l^*\}^T)[p]([a]\{x\}-\{l^*\})\\ &= \{x\}^T[a]^T[p][a]\{x\}-\{x\}^T[a]^T[p]\{l^*\}-\{l^*\}^T[p][a]\{x\}+\{l^*\}^T[p]\{l^*\} \qquad (1.18)\end{aligned}$$

となる。ここで

$$\{x\}^T[a]^T[p]\{l^*\}=\{l^*\}^T[p][a][x] \qquad (1.19)$$

に注意するとともに

$$[N]=[a]^T[p][a] \qquad (1.20a)$$

$$\{U\}=[a]^T[p]\{l^*\} \qquad (1.20b)$$

と書くことにすると，(1.17)式は

$$\{e\}^T[p]\{e\}=\{x\}^T[N]\{x\}-2\{x\}^T\{U\}+\{l^*\}^T[p]\{l^*\}=\min \qquad (1.21)$$

となる。(1.20a)式から簡単に分かるように，$[N]$は正値対称行列（positive definite symmetric matrix）である。

$\{\hat{x}\}$と$\{\hat{e}\}$を(1.21)式の解，すなわち未知数$\{x\}$と$\{e\}$の推定値とすると

$$\begin{aligned}0 &= \boldsymbol{d}\left|\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}\right|\\ &= 2\{\boldsymbol{d}\hat{x}\}^T[N]\{\hat{x}\}-2\{\boldsymbol{d}\hat{x}\}^T\{U\} \qquad (1.22)\end{aligned}$$

であるので

$$[N]\{\hat{x}\}=\{U\} \qquad (1.23)$$

を得る。この方程式を正規方程式（normal equation）と呼ぶ。$\det([N])\neq 0$ならば，$[N]^{-1}$が存在するので

$$\{\hat{x}\}=[N]^{-1}\{U\}=([a]^T[p][a])^{-1}[a]^T[p]\{l^*\} \qquad (1.24)$$

を得る。$\{\hat{e}\}$は(1.11)式より

$$\{\hat{e}\}=\{l^*\}-[a]\{\hat{x}\}=\{l^*\}-[a]([a]^T[p][a])^{-1}[a]^T[p]\{l^*\} \qquad (1.25)$$

と求まる。$\{\hat{e}\}$は観測誤差$\{e\}$の推定値である。このことは，$[a]\{\hat{x}\}$が観測量真値の推定値と考えられることからも理解されよう。

$\{\hat{e}\}$については

$$[a]^T[p]\{\hat{e}\} = [a]^T[p]\{l^*\} - [a]^T[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l^*\} = 0 \qquad (1.26)$$

が成立するので，計算のチェックに使える。

n 個の観測値が独立でない場合，すなわち $s_{ij} = s_0{}^2 / p_{ij} \neq 0,\ i \neq j$ の場合（→(3.6)式）には

$$\{e\}^T[p]\{e\} = \min \qquad (1.27)$$

から出発する。$[p]$ は正定値対称行列であるので

$$[p] = [p^{1/2}][p^{1/2}]^T \qquad (1.28)$$

と書ける。$[p]$ が(1.14a)式のように対角行列の場合には，$[p^{1/2}]$ は(1.14b)式のような対角行列であるが，一般には対角行列ではない（付録 B)。観測方程式の 1 重差，2 重差を取ってこれらを新たに観測方程式とする場合には，このようなケースになる（付録 A)。

[問題 1.1]　(1.28)式が成り立つことを示せ。$[p]$ が 3 行 3 列で対角要素が 2，その他の要素が 1 の場合について，$[p^{1/2}]$ を求めよ。（ヒント：$[p^{1/2}]$ として，下三角行列を考える）

[問題 1.2]　2 入力 3 出力のシステムがある。入力(未知量)を $x_1,\ x_2$，出力(計測値)を l_1, l_2, l_3 とし，出力から入力を推定する問題を考える。このシステムの数学モデルを $l_1 = 2x_1 + x_2, l_2 = x_1 + x_2, l_3 = x_1 - x_2$ とし，入力 $x_1,\ x_2$ は互いに独立とするとき，出力は独立ではない。この場合の $[p]$ を求めよ。

2．観測誤差の推定

(1.11)式の観測方程式を書き直すと

$$\{e\} = \{l^*\} - [a]\{x\} \qquad (2.1)$$

と書ける。観測誤差 $\{e\}$ の分散は，行列を用いると

$$E\left\langle \{e\}\{e\}^T \right\rangle = E\left\langle \begin{bmatrix} e_1e_1 & e_1e_2 & \cdots & \cdots & e_1e_n \\ e_2e_1 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ e_ne_1 & \cdots & \cdots & \cdots & e_ne_n \end{bmatrix} \right\rangle = \left[E\left\langle e_ie_j \right\rangle\right] = s_0{}^2[p]^{-1} \qquad (2.2)$$

と書ける。$s_0{}^2$ と $[p]$ は相対的にしか決定されない。

(2.1)式の両辺に $[a]^T[p]$ を掛けると

$$[a]^T[p][a]\{x\} = [a]^T[p]\left(\{l^*\} - \{e\}\right) \qquad (2.3)$$

を得る。これを $\{x\}$ について解くと

$$\{x\}=\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\left(\{l*\}-\{e\}\right) \tag{2.4}$$

と書ける。これは，(1.24)式で$\{l*\}$を$\{l\}=\{l*\}-\{e\}$としたものに等しい。(2.4)式を(2.1)式に代入すると

$$\{e\}-[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{e\}=\{l*\}-[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l*\} \tag{2.5}$$

となるが，両辺に$[p^{1/2}]^T$を掛けると

$$[p^{1/2}]^T\{e\}-[a^0][p^{1/2}]^T\{e\}=[p^{1/2}]^T\{l*\}-[a^0][p^{1/2}]^T\{l*\} \tag{2.6}$$

を得る。ここで

$$[a^0]=[p^{1/2}]^T[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p^{1/2}] \tag{2.7}$$

とする。$[a^0]$は対象行列で，さらにべき等行列である。すなわち

$$\begin{aligned}[a^0][a^0]&=[p^{1/2}]^T[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p^{1/2}]\\&=[p^{1/2}]^T[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p^{1/2}]=[a^0]\end{aligned} \tag{2.8}$$

が成り立つ。

(2.6)式の両辺の転置を取ると

$$\{e\}^T[p^{1/2}]-\{e\}^T[p^{1/2}][a^0]=\{l*\}^T[p^{1/2}]-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0] \tag{2.9}$$

である。(2.6)式と(2.9)式の両辺を乗ずると，左辺は

$$\begin{aligned}&\left(\{e\}^T[p^{1/2}]-\{e\}^T[p^{1/2}][a^0]\right)\left([p^{1/2}]^T\{e\}-[a^0][p^{1/2}]^T\{e\}\right)\\&=\{e\}^T[p]\{e\}-\{e\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{e\}\\&\quad-\{e\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{e\}+\{e\}^T[p^{1/2}][a^0][a^0][p^{1/2}]^T\{e\}\\&=\{e\}^T[p]\{e\}-\{e\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{e\}\end{aligned} \tag{2.10a}$$

右辺は

$$\begin{aligned}&\left(\{l*\}^T[p^{1/2}]-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0]\right)\left([p^{1/2}]^T\{l*\}-[a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\right)\\&=\{l*\}^T[p]\{l*\}-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\\&\quad-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}+\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\\&=\{l*\}^T[p]\{l*\}-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\end{aligned} \tag{2.10b}$$

となる。したがって

$$
\begin{aligned}
&\{\boldsymbol{e}\}^T[p]\{\boldsymbol{e}\}-\{\boldsymbol{e}\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{\boldsymbol{e}\}\\
&\qquad=\{l*\}^T[p]\{l*\}-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

が成り立つ。ここで

$$
\begin{aligned}
E\left\langle\{\boldsymbol{e}\}^T[p]\{\boldsymbol{e}\}\right\rangle&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}E\left\langle\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\right\rangle=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j p_{ij}[p]^{-1}{}_{ij}\\
&=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j p_{ij}[p]^{-1}{}_{ji}=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\boldsymbol{d}_{ii}=n\boldsymbol{s}_0{}^2
\end{aligned}
\tag{2.12a}
$$

$$
\begin{aligned}
&E\left\langle\{\boldsymbol{e}\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{\boldsymbol{e}\}\right\rangle=E\left\langle\sum_i\sum_j a^0_{i\,j}\left(\{\boldsymbol{e}\}^T[p^{1/2}]\right)_i\left([p^{1/2}]^T\{\boldsymbol{e}\}\right)_j\right\rangle\\
&=E\left\langle\sum_i\sum_j a^0_{i\,j}\left(\sum_k\boldsymbol{e}_k[p^{1/2}]_{ki}\right)\left(\sum_l[p^{1/2}]^T{}_{jl}\,\boldsymbol{e}_l\right)\right\rangle\\
&=\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l a^0_{i\,j}[p^{1/2}]_{ki}[p^{1/2}]^T{}_{jl}\,E\left\langle\boldsymbol{e}_k\boldsymbol{e}_l\right\rangle\\
&=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l a^0_{i\,j}[p^{1/2}]_{ki}[p^{1/2}]^T{}_{jl}[p]^{-1}{}_{kl}\\
&=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j\sum_k\sum_l a^0_{i\,j}[p^{1/2}]_{ki}[p^{1/2}]^T{}_{jl}\sum_k[p^{1/2}]^{-1}{}_{kk}[p^{1/2}]^{-1}{}_{kl}\\
&=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j a^0_{i\,j}\sum_k\boldsymbol{d}_{ik}\boldsymbol{d}_{kj}=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum_i\sum_j a^0_{i\,j}\boldsymbol{d}_{ij}\\
&\qquad\qquad=\boldsymbol{s}_0{}^2\sum a^0_{i\,i}=\boldsymbol{s}_0{}^2 tr([a^0])
\end{aligned}
\tag{2.12b}
$$

に注意すると

$$
E\left\langle\{\boldsymbol{e}\}^T[p]\{\boldsymbol{e}\}-\{\boldsymbol{e}\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{\boldsymbol{e}\}\right\rangle=\boldsymbol{s}_0{}^2 tr\left(I-[a^0]\right)
\tag{2.13}
$$

となる。これより

$$
\boldsymbol{s}_0{}^2=\frac{E\left\langle\{l*\}^T[p]\{l*\}-\{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\right\rangle}{tr\left(I-[a^0]\right)}
\tag{2.14}
$$

を得る。

$[a^0]$ はべき等行列であるので

$$
tr\left([a^0]\right)=rank\left([a^0]\right)=m
\tag{2.15}
$$

である（付録 C)。これより

$$
tr\left(I-[a^0]\right)=tr(I)-tr\left([a^0]\right)=n-m
\tag{2.16}
$$

であるので

$$\sigma_0{}^2 = \frac{E\left\langle \{l*\}^T[p]\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\right\rangle}{n-m} \tag{2.17}$$

となる。$n-m$は観測方程式の数と未知物理量の数の差で，自由度と呼ばれる。

一方，(1.25)式と(2.7)式より

$$\begin{aligned}\{\hat{e}\} &= \{l*\} - [a]\{\hat{x}\} = \{l*\} - [a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l*\} \\ &= \{l*\} - ([p^{1/2}]^{-1})^T[a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\end{aligned} \tag{2.18}$$

であるので

$$\begin{aligned}\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\} &= \left(\{l*\}^T - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^{-1}\right)[p]\left(\{l*\} - ([p^{1/2}]^{-1})^T[a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\right) \\ &= \{l*\}^T[p]\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\} \\ &\quad + \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\} \\ &= \{l*\}^T[p]\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\end{aligned} \tag{2.19}$$

となる。これより，$\hat{s}_0{}^2$ を

$$\hat{s}_0{}^2 = \frac{\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}}{n-m} = \frac{\{l*\}^T[p]\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}}{tr\left(I-[a^0]\right)} \tag{2.20}$$

により定義すると

$$E\left\langle \hat{s}_0{}^2\right\rangle = \frac{E\left\langle \{l*\}^T[p]\{l*\} - \{l*\}^T[p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T\{l*\}\right\rangle}{tr\left(I-[a^0]\right)} = \sigma_0{}^2 \tag{2.21}$$

であるので，$\hat{s}_0{}^2$ は分散$\sigma_0{}^2$ の不偏推定量になっている。

[問題 2.1]　棒の長さをx，その計測値をl_i，$(i=1,2,\cdots,n)$ とし，そのi 回目の計測値をl_i*とする。このときの数学モデル，観測方程式を示せ。また，xの予測値$\hat{x}$が$\sum_{i=1,n} l_i*/n$，単位重量分散分散$\sigma_0{}^2$ の推定値$\hat{s}_0{}^2$ が$\sum_{i=1,n}(l_i-\hat{x})^2/(n-1)$ となることを示せ。（ヒント：$[a]=[1,1,\cdots,1]^T$ および$[p]=[I]$を用いる）

３．未知物理量の誤差の推定

(1.24)式と(2.4)式より

$$\begin{aligned}\{\hat{x}\} &= \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l*\} \\ &= \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\left(\{l\}+\{e\}\right)\end{aligned}$$

$$= \{x\} + \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\} \tag{3.1}$$

であるので，$\{x\}$の誤差$\{\boldsymbol{e}_x\}$は

$$\{\boldsymbol{e}_x\} = \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\} \tag{3.2}$$

となる。両辺の転置を取ると

$$\{\boldsymbol{e}_x\}^T = \{\boldsymbol{e}\}^T[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} \tag{3.3}$$

となる。$[p]$が対称行列であることが使われている。これより

$$\{\boldsymbol{e}_x\}\{\boldsymbol{e}_x\}^T = \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} \tag{3.4}$$

である。未知物理量$\{x\}$の分散は

$$\begin{aligned}
E\left\langle\{\boldsymbol{e}_x\}\{\boldsymbol{e}_x\}^T\right\rangle &= E\left\langle\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T[p]^T[a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}\right\rangle \\
&= \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\cdot E\left\langle\{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T\right\rangle\cdot[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} \\
&= \left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\cdot \boldsymbol{s}_0{}^2[p]^{-1}[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} \\
&= \boldsymbol{s}_0{}^2\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} \\
&= \boldsymbol{s}_0{}^2\left([a]^T[p][a]\right)^{-1} = \boldsymbol{s}_0{}^2[N]^{-1}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

と書ける。

(3.5)式より，未知物理量の分散共分散行列（variance-covariance matrix）Σ_xは

$$\Sigma_x = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s}_{x_1}^2 & \boldsymbol{s}_{x_1x_2} & \cdots\cdots & \boldsymbol{s}_{x_1x_m} \\ \vdots & \boldsymbol{s}_{x_2}^2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{s}_{x_1x_m} & \cdots\cdots\cdots\cdots & & \boldsymbol{s}_{x_m}^2 \end{bmatrix}$$

$$= E\left\langle\{\boldsymbol{e}_x\}\{\boldsymbol{e}_x\}^T\right\rangle = \begin{bmatrix} E\left\langle \boldsymbol{e}^2{}_{x_1}\right\rangle & E\left\langle \boldsymbol{e}_{x_1}\boldsymbol{e}_{x_2}\right\rangle & \cdots \\ E\left\langle \boldsymbol{e}_{x_1}\boldsymbol{e}_{x_2}\right\rangle & E\left\langle \boldsymbol{e}^2{}_{x_2}\right\rangle & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ E\left\langle \boldsymbol{e}_{x_1}\boldsymbol{e}_{x_m}\right\rangle & \cdots & E\left\langle \boldsymbol{e}^2{}_{x_m}\right\rangle \end{bmatrix} = \boldsymbol{s}_0{}^2[N]^{-1} \tag{3.6}$$

となる。したがって

$$s_{x_i}^{\,2} = s_0^{\;2}[N]^{-1}{}_{ii} \tag{3.7}$$

に対して

$$\hat{s}_{x_i}^{\,2} = \hat{s}_0^{\,2}[N]^{-1}{}_{ii} \tag{3.8a}$$

$$\hat{s}_0^{\,2} = \frac{\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}^2}{n-m} \tag{3.8b}$$

とすると，$\hat{s}_{x_i}^{\,2}$ が $s_{x_i}^{\,2}$ の不偏推定量となる。

未知物理量 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_m$ の関数 u

$$u = \sum_j f_j x_j = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots\cdots + f_m x_m \tag{3.9}$$

は

$$\begin{aligned} \hat{u} &= \{f\}^T\{\hat{x}\} = \{f\}^T\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{l*\} \\ &= \{f\}^T\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\left(\{l\}+\{\boldsymbol{e}\}\right) \\ &= \{f\}^T\{x\} + \{f\}^T\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

であるので，(3.2)式と同様に考えて

$$\boldsymbol{e}_u = \{f\}^T\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]\{\boldsymbol{e}\} \tag{3.11}$$

とできる。これより

$$\begin{aligned} \boldsymbol{s}_u^{\;2} &= E\left\langle \boldsymbol{e}_u^{\;2} \right\rangle \\ &= \{f\}^T\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}[a]^T[p]E\left\langle \{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T \right\rangle[p][a]\left([a]^T[p][a]\right)^{-1}\{f\} \\ &= \boldsymbol{s}_0^{\;2}\{f\}^T[N]^{-1}\{f\} \end{aligned} \tag{3.12}$$

であるので

$$\hat{\boldsymbol{s}}_u^{\;2} = \hat{\boldsymbol{s}}_0^{\;2}\{f\}^T[N]^{-1}\{f\} \tag{3.13}$$

とすると，$\hat{s}_u^{\,2}$ が $s_u^{\,2}$ の不偏推定量となる。

未知物理量 x_i と x_j の共分散は，$E\left\langle x_i \right\rangle = \boldsymbol{x}_i$ として(3.6)式より

$$\boldsymbol{s}_{x_i x_j} = E\left\langle (x_i - \boldsymbol{x}_i)(x_j - \boldsymbol{x}_j) \right\rangle = E\left\langle \boldsymbol{e}_{x_i}\boldsymbol{e}_{x_j} \right\rangle = \boldsymbol{s}_0^{\;2}[N]^{-1}{}_{ij} \tag{3.13}$$

である。これより，相関係数（correlation coefficient）は

$$\boldsymbol{r}_{x_i x_j} = \frac{\boldsymbol{s}_{x_i x_j}}{\boldsymbol{s}_{x_i} \boldsymbol{s}_{x_j}} = \frac{[N]^{-1}{}_{ij}}{\sqrt{[N]^{-1}{}_{ii} [N]^{-1}{}_{jj}}} \tag{3.14}$$

となる。
[問題 3.1]　[問題 1.2]において，$l_1{*} = 254, l_2{*} = 148, l_1{*} = 51$の場合について，入力の推定値 $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ および誤差の標準偏差の推定値 $\sqrt{\hat{s}_{x_1}^2}, \sqrt{\hat{s}_{x_2}^2}$ を求めよ。ただし，簡単のために，$[p] = [I]$ とする。

4．未知物理量の信頼域

観測誤差 $\{e\}$ が正規分布をするとき，未知物理量の推定値 $\{\hat{x}\}$ は正規分布，単位重量分散の推定値 $\hat{s}_0{}^2$ は自由度 $n - m$ の c^2 分布をすること，および未知物理量推定値の信頼区域などを以下に示す。

観測誤差 $\{e\}$ は $N(0, s_0{}^2 [p]^{-1})$ であるので

$$\{l*\} = [a]\{x\} + \{e\} \tag{1.11}$$

より観測値 $\{l*\}$ は n 次元正規分布 $N([a]\{x\}, s_0{}^2 [p]^{-1})$ をする。したがって，$\{x\}$ の最小二乗推定量 $\{\hat{x}\}$

$$\{\hat{x}\} = [N]^{-1}\{U\} = \left([a]^T [p][a]\right)^{-1} [a]^T [p]\{l*\} \tag{1.24}$$

の平均と分散は

$$E\langle\{\hat{x}\}\rangle = \left([a]^T [p][a]\right)^{-1} [a]^T [p][a]\{x\} = \{x\} \tag{4.1a}$$

$$\begin{aligned} E\left\langle\left(\{\hat{x}\} - \{x\}\right)\left(\{\hat{x}\} - \{x\}\right)^T\right\rangle &= \left([a]^T [p][a]\right)^{-1} [a]^T [p] \boldsymbol{s}_0{}^2 [p]^{-1} [p][a]\left([a]^T [p][a]\right)^{-1} \\ &= \boldsymbol{s}_0{}^2 \left([a]^T [p][a]\right)^{-1} = \boldsymbol{s}_0{}^2 [Q_x] \end{aligned} \tag{4.1b}$$

であるので（付録 D），m 次元正規分布 $N(\{x\}, s_0{}^2 [Q_x])$ をする。ここで

$$[Q_x] = \left([a]^T [p][a]\right)^{-1} = [N]^{-1} \tag{4.2}$$

とする。
(2.19)式より

$$\{\hat{e}\}^T [p]\{\hat{e}\} = \{l*\}^T [p]\{l*\} - \{l*\}^T [p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T \{l*\} \tag{4.3}$$

であるが，この式を変形すると

$$\{\hat{e}\}^T [p]\{\hat{e}\} = \{l*\}^T [p^{1/2}][p^{1/2}]^T \{l*\} - \{l*\}^T [p^{1/2}][a^0][p^{1/2}]^T \{l*\}$$

$$
\begin{aligned}
&=\{l*\}^T[p^{1/2}]\big([I]-[a^0]\big)[p^{1/2}]^T\{l*\}\\
&=\big([p^{1/2}]^T\{l*\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)[p^{1/2}]^T\{l*\}\\
&=\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}+[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\\
&\qquad\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}+[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&=\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&\quad+\big([p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&\quad+\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&\quad+\big([p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&=\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&\quad+\{x\}^T[a]^T[p^{1/2}]\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)\\
&\quad+\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big\{[a]^T[p^{1/2}]\big([I]-[a^0]\big)\big\}^T\{x\}\\
&\quad+\big([p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big\{[a]^T[p^{1/2}]\big([I]-[a^0]\big)\big\}^T\{x\}
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

となるが，(2.7)式と(1.28)式を用いると

$$
\begin{aligned}
&[a]^T[p^{1/2}]\big([I]-[a^0]\big)=[a]^T[p^{1/2}]-[a]^T[p^{1/2}][a^0]\\
&\quad=[a]^T[p^{1/2}]-[a]^T[p^{1/2}][p^{1/2}]^T[a]\big([a]^T[p][a]\big)^{-1}[a]^T[p^{1/2}]\\
&\quad=[a]^T[p^{1/2}]-[a]^T[p][a]\big([a]^T[p][a]\big)^{-1}[a]^T[p^{1/2}]\\
&\quad=[a]^T[p^{1/2}]-[a]^T[p^{1/2}]=0
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

であるので

$$
\begin{aligned}
&\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}\\
&\quad=\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T\big([I]-[a^0]\big)\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)
\end{aligned}
\tag{4.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\hat{s}_0^{\,2}}{s_0^{\,2}}(n-m)=\frac{\{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}^2}{s_0^{\,2}}\\
&\quad=\frac{\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)^T}{s_0}\big([I]-[a^0]\big)\frac{\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)}{s_0}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

となる。ここで

$$
[p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}=[p^{1/2}]^T\{e\}
\tag{4.8}
$$

であるので，$\big([p^{1/2}]^T\{l*\}-[p^{1/2}]^T[a]\{x\}\big)/s_0$ は n 次元正規分布 $N(0,[I])$ にしたがう（付録 B，D)。また，$[a^0]$ は対称なべき等行列であるので，$[I]-[a^0]$ も対称なべき等行列である。また

$$tr(I-[a^0]) = n - tr[a^0] = n - m \tag{4.9}$$

であるので，$\hat{\sigma}_0{}^2(n-m)\big/\sigma_0{}^2 = \{\hat{e}\}^T[p]\{\hat{e}\}\big/\sigma_0{}^2$ は自由度 $n-m$ の χ^2 分布にしたがう(付録 E)。

つぎに，m 次元ベクトル $\{r\}$ を用いて，確率変数 t を

$$t = \frac{\{r\}^T\{\hat{x}\} - \{r\}^T\{x\}}{\sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2 Q_r}} \tag{4.10}$$

を定義する。ここで，Q_r は

$$Q_r = \{r\}^T[Q_x]\{r\} \tag{4.11}$$

であり，$\sigma_0{}^2 Q_r = \sigma_0{}^2\{r\}^T[Q_x]\{r\}$ は $\{r\}^T\{\hat{x}\}$ の分散である。$\{r\}$ が単位ベクトルのとき，すなわち，i 番目の要素が 1 で他は 0 であるようなものを考えると，$\{r\}^T\{x\} = x_i$ に外ならない。(4.10)式を書き直すと

$$t = \frac{\dfrac{\{r\}^T\{\hat{x}\} - \{r\}^T\{x\}}{\sqrt{\sigma_0{}^2 Q_r}}}{\sqrt{\left[\dfrac{\hat{\sigma}_0{}^2(n-m)}{\sigma_0{}^2}\right]\Big/(n-m)}} \tag{4.12}$$

である。(4.1b)式と(4.11)式より $\left(\{r\}^T\{\hat{x}\} - \{r\}^T\{x\}\right)\Big/\sqrt{\sigma_0{}^2 Q_r}$ は正規分布 $N(0,1)$ であり，(4.7)式から得た結論より $\hat{\sigma}_0{}^2(n-m)\big/\sigma_0{}^2$ は自由度 $(n-m)$ の χ^2 分布に従うので，t は自由度 $(n-m)$ の t 分布に従う（付録 G)。

信頼係数を $1-\alpha$ とする。すなわち，$t > t_{\alpha/2}$ である確率が $\alpha/2$ である点として $t_{\alpha/2}$ を定義する。このとき，信頼係数を $1-\alpha$ とする信頼域は

$$\{r\}^T\{\hat{x}\} - t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2 Q_r} < \{r\}^T\{x\} < \{r\}^T\{\hat{x}\} + t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2 Q_r} \tag{4.13}$$

となる。この式により，個々の未知物理量 x_i，$i = 1,2,\cdots,m$ の信頼域を求められる。$\{r\}$ として，i 番目の要素が 1 で他は 0 の単位ベクトルを考えると

$$\hat{x}_i - t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2[N]^{-1}{}_{ii}} < x_i < \hat{x}_i + t_{\alpha/2}\sqrt{\hat{\sigma}_0{}^2[N]^{-1}{}_{ii}} \tag{4.14}$$

となる。

$[r]$ を k 行 m 列の行列とし，$k \le m$，$rank([r]) = k$ として，$\{y\} = [r]\{x\}$ により $\{x\}$ を $\{y\}$ に変換する。このとき，$\{\hat{y}\} = [r]\{\hat{x}\}$ とすると，$\{\hat{y}\}$ は k 次元正規分布 $N([r]\{x\}, \sigma_0{}^2[r][Q_x][r]^T)$ に従う（付録 D)。付録 I により，2 次形式 W

$$W = (\{\hat{y}\} - \{y\})^T (\boldsymbol{s}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} (\{\hat{y}\} - \{y\}) \tag{4.15}$$

は，自由度kの$\boldsymbol{c}^2$分布に従う（付録 I)。ここで，$\boldsymbol{s}_0{}^2$を$\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2$に置き換えた

$$\hat{W} = (\{\hat{y}\} - \{y\})^T (\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} (\{\hat{y}\} - \{y\}) \tag{4.16}$$

に置き換えた 2 次形式を考えると

$$\begin{aligned}\frac{\hat{W}}{k} &= \frac{(\{\hat{y}\} - \{y\})^T (\boldsymbol{s}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} (\{\hat{y}\} - \{y\}) \big/ k}{\dfrac{\boldsymbol{s}_0{}^2 (n-m)}{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2} \Big/ (n-m)} \\ &= \frac{W/k}{\dfrac{\boldsymbol{s}_0{}^2 (n-m)}{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2} \Big/ (n-m)}\end{aligned} \tag{4.17}$$

である。分子のWは自由度kの$\boldsymbol{c}^2$分布，分母の$\boldsymbol{s}_0{}^2(n-m)\big/\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2$は自由度$n-m$の$\boldsymbol{c}^2$分布に従うので，付録 H により$\hat{W}\big/k$は自由度$(k, n-m)$の$F$分布に従う。

信頼係数を$1-\boldsymbol{a}$とすると，$\boldsymbol{s}_0{}^2$が既知のときは，(4.15)**式を用いて**

$$(\{\hat{y}\} - \{y\})^T (\boldsymbol{s}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} (\{\hat{y}\} - \{y\}) < (\boldsymbol{c}^2{}_k)_a \tag{4.18a}$$

$\boldsymbol{s}_0{}^2$が未知のときは，(4.15)**式を用いて**

$$(\{\hat{y}\} - \{y\})^T (\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} (\{\hat{y}\} - \{y\}) < k(F_{k,n-m})_a \tag{4.18b}$$

となる。$n-m \to \infty$とすると

$$k(F_{k,n-m})_a = (\boldsymbol{c}^2{}_k)_a \tag{4.19}$$

となるので，$\boldsymbol{s}_0{}^2$が既知のときと同じになる。$[r]$が1行m列の単位行列のとき，すなわち，$[r]=[0,0,\cdots,0,1,0,\cdots,0]$であるとき

$$\{\hat{y}\} - \{y\} = [0,0,\cdots,0,\hat{x}_i - x_i,0,\cdots,0]^T \tag{4.20a}$$

$$(\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [r][Q_x][r]^T)^{-1} = (\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 Q_{xii})^{-1} = (\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [N]^{-1}{}_{ii})^{-1} \tag{4.20b}$$

であるので，(4.18b)**式は**

$$(\hat{x}_i - x_i)^2 < \hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [N]^{-1}{}_{ii} (F_{1,n-m})_a \tag{4.21}$$

となる。書き直すと

$$\hat{x}_i - \sqrt{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [N]^{-1}{}_{ii} (F_{1,n-m})_a} < x_i < \hat{x}_i + \sqrt{\hat{\boldsymbol{s}}_0{}^2 [N]^{-1}{}_{ii} (F_{1,n-m})_a} \tag{4.22}$$

であるので，これより x_i，$i = 1,2,\cdots,n$ の信頼域を求めることができる。

5．簡単な例題

GPS における座標および不定性決定の問題の数値例を通して，以上で述べた最小二乗法および統計定推定理論を具体的に説明する。

図 5.1 に示されるような衛星と受信機の配置を考える。以下においては，1 周波観測，すなわち L1 波での計測だけを対象とする。また，基線長（基準点と観測点の間の距離）が小さいとして，電離層および対流圏による大気圏遅延は無視する。

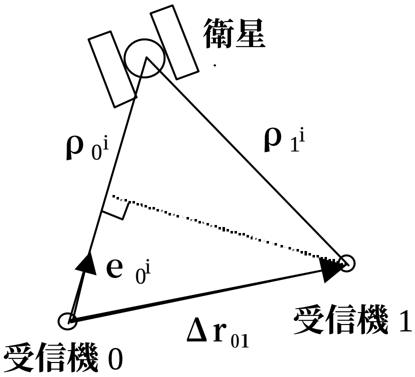

図 5.1　衛星と受信機の配置

擬似距離観測量 P_a^i，位相距離観測量 Φ_a^i，真値 $\boldsymbol{r}_a^i$，バイアス d^i, d_a, d_a^i，アンビギュイティ N_a^i の関係を表す擬似距離および位相距離の観測方程式は

$$\left.\begin{matrix} P_a^i \\ \Phi_a^i \end{matrix}\right\} = \boldsymbol{r}_a^i + d^i + d_a + \left\{\begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{l}_1 N_a^i \end{matrix}\right\} + \boldsymbol{e}_a^i, \quad i = 0,1,\cdots,N_S - 1;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \tag{5.1}$$

で与えられる。ここで，N_S は衛星数を，$\boldsymbol{a} = 0$ は基準点，$\boldsymbol{a} = 1$ は観測点を表わす。また

P_a^i ：L1（周波数 f_1，波長 $\boldsymbol{l}_1$）による衛星 i と受信機 $\boldsymbol{a}$ との間の擬似距離観測量

Φ_a^i ：L1（周波数 f_1，波長 $\boldsymbol{l}_1$）による衛星 i と受信機 $\boldsymbol{a}$ との間の搬送波の波数に，波長を掛けて距離に直した位相距離観測量

$\boldsymbol{r}_a^i$ ：衛星 i と受信機 $\boldsymbol{a}$ との間の距離の真値

d^i ：衛星に起因するバイアス（時計，電子回路，衛星位置）

d_a ：受信機に起因するバイアス（時計，電子回路）

d_a^i ：電波伝播路に起因するバイアス（時計，電子回路）

N_a^i ：波数の整数不定性，コードレンジの場合は考えない。

e_a^i ：その他の誤差

とする。

バイアスが無視できないときには，以下に述べる工夫をすればよい。すなわち，d^i はaに依らないので，d^i を消去するためには，a 間（受信機間）の 1 重差を取ればよい。すなわち

$$\left.\begin{matrix}(\Delta P)_{01}^i \\ (\Delta\Phi)_{01}^i\end{matrix}\right\} = (\Delta \boldsymbol{r})_{01}^i + (\Delta d)_{01} + \begin{Bmatrix}0 \\ \boldsymbol{l}_1(\Delta N)_{01}^i\end{Bmatrix} + (\Delta \boldsymbol{e})_{01}^i, \quad i = 0,1,\cdots,N_S-1 \tag{5.2}$$

を考えればよい。ここで

$$(\Delta\bullet)_{ab} = (\bullet)_a - (\bullet)_b \tag{5.3}$$

d_a はiに依らないので，d_a を消去するためには，i 間（衛星間）の 1 重差を取ればよい。すなわち，衛星iと衛星 N_S-1の差を取ることにすると

$$\left.\begin{matrix}(\nabla P)_a^{i\,N_S-1} \\ (\nabla\Phi)_a^{i\,N_S-1}\end{matrix}\right\} = (\nabla \boldsymbol{r})_a^{i\,N_S-1} + (\nabla d)^{i\,N_S-1} + \begin{Bmatrix}0 \\ \boldsymbol{l}_1(\nabla N)_a^{i\,N_S-1}\end{Bmatrix} + (\nabla \boldsymbol{e})_a^{i\,N_S-1},$$
$$i = 0,1,N_S-2;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \tag{5.4}$$

を考えればよい。2 番目の衛星の取り方にはいろいろ考えられ。高度の一番大きなものが選ばれることが多い。ここで

$$(\nabla\bullet)^{ij} = (\bullet)^i - (\bullet)^j \tag{5.5}$$

とする。

d^i とd_a が同時に存在する時には，2 重差を取ればよい。すなわち，a（またはi）間 1 重差を取ったものについて，さらにi（またはa）間 1 重差を取る。具体的に書くと

$$\left.\begin{matrix}(\nabla\Delta P)_{01}^{i\,N_S-1} \\ (\nabla\Delta\Phi)_{01}^{i\,N_S-1}\end{matrix}\right) = (\nabla\Delta \boldsymbol{r})_{01}^{i\,N_S-1} + \begin{Bmatrix}0 \\ \boldsymbol{l}_1(\nabla\Delta N)_{01}^{i\,N_S-1}\end{Bmatrix} + (\nabla\Delta \boldsymbol{e})_{01}^{i\,N_S-1},$$
$$i = 0,1,\cdots,N_S-1 \tag{5.6}$$

である。ここで

$$(\nabla\Delta\bullet)_{01}^{ij} = (\Delta\bullet)_{01}^i - (\Delta\bullet)_{01}^j = (\nabla\bullet)_0^{ij} - (\nabla\bullet)_1^{ij} \tag{5.7}$$

とする。

基線長（基準点と観測点の距離）は，衛星高度に比べて大きくないことが多いので，$(\Delta \boldsymbol{r})_{ab}^i$ および $(\Delta \boldsymbol{r})_{ab}^{ij}$ を簡単にできる。基準点と観測点の相対位置ベクトルを $\Delta\mathbf{r}_{01} = (\Delta x_{01}, \Delta y_{01}, \Delta z_{01})$ とすると

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0 + \Delta x_{01},\ y_0 + \Delta y_{01},\ z_0 + \Delta z_{01}) \tag{5.8}$$

であるので

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_1^i &= \sqrt{(x_0 - x^i + \Delta x_{01})^2 + (y_0 - y^i + \Delta y_{01})^2 + (z_0 - z^i + \Delta z_{01})^2} \\ &\approx \boldsymbol{r}_0^i - e_{0,x}^i \Delta x_{01} - e_{0,y}^i \Delta x_{01} - e_{0,z}^i \Delta z_{01} \end{aligned} \tag{5.9}$$

となる。ここで，$\mathbf{e}_0^i = (e_{0,x}^i, e_{0,y}^i, e_{0,z}^i)$ は基準点受信機 0 から衛星 i に向かう単位ベクトルである。(5.9)式を(5.2)式および(5.6)式に代入すると下記の近似を得る。

$$\left.\begin{matrix} (\Delta P)_{01}^i \\ (\Delta \Phi)_{01}^i \end{matrix}\right\} \approx \mathbf{e}_0^i \cdot \Delta \mathbf{r}_{01} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{l}_1 (\Delta N)_{01}^i \end{matrix}\right\} + (\nabla \Delta \boldsymbol{e})_{01}^i, \quad i = 0,1,\cdots,N_S - 1 \tag{5.10}$$

$$\left.\begin{matrix} (\nabla \Delta P)_{01}^{i\,N_S-1} \\ (\nabla \Delta \Phi)_{01}^{i\,N_S-1} \end{matrix}\right\} \approx (\mathbf{e}_0^i - \mathbf{e}_0^{N_S-1}) \cdot \Delta \mathbf{r}_{01} + \left\{\begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{l}_1 (\nabla \Delta N)_{01}^{i\,N_S-1} \end{matrix}\right\} + (\nabla \Delta \boldsymbol{e})_{01}^{i\,N_S-1}, \quad i = 0,1,\cdots,N_S - 1 \tag{5.11}$$

(5.4)式に関しては，受信機 $\boldsymbol{a}$ の座標 (x_a, y_a, z_a) の近似値を $((x_a)_0, (y_a)_0, (z_a)_0)$ とし，繰り返し計算の修正値を (dx_a, dy_a, dz_a) とすると，すなわち

$$(x_a, y_a, z_a) = ((x_a)_0 + dx_a, (y_a)_0 + dy_a, (z_a)_0 + dz_a) \tag{5.12}$$

とすると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}_a^i &= \sqrt{((x_a)_0 - x^i + dx_a)^2 + ((y_a)_0 - y^i + dy_a)^2 + ((z_a)_0 - z^i + dz_a)^2} \\ &\approx (\boldsymbol{r}_a^i)_0 - (e_{a,x}^i)_0 dx_a - (e_{a,y}^i)_0 dx_a - (e_{a,z}^i)_0 dz_a = (\boldsymbol{r}_a^i)_0 - (\mathbf{e}_a^i)_0 d\mathbf{r}_a \end{aligned} \tag{5.13}$$

であるので

$$\begin{aligned} \left.\begin{matrix} (\nabla P)_a^{i\,N_S-1} \\ (\nabla \Phi)_a^{i\,N_S-1} \end{matrix}\right\} &\approx ((\nabla \boldsymbol{r})_a^{i\,N_S-1})_0 - \left((\mathbf{e}_a^i)_0 - (\mathbf{e}_a^{N_S-1})_0\right) d\mathbf{r}_a + (\nabla d)^{i\,N_S-1} \\ &\quad + \left\{\begin{matrix} 0 \\ \boldsymbol{l}_1 (\nabla N)_a^{i\,N_S-1} \end{matrix}\right\} + (\nabla \boldsymbol{e})_a^{i\,N_S-1}, \quad i = 0,1,N_S - 2;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \end{aligned} \tag{5.14}$$

を繰り返し計算で収束させればよい。

以下の数値例においては，国土地理院の電子基準点データ提供サービス（http://terras.gsi.go.jp/inet_NEW/index2.html）からダウンロードしたデータを用いている。基準点として浜岡 1（93094），観測点として浜岡 2（960625）を用いている。同ホ

ームページに与えられている日々の座標値から計算した基線長は 2881.326mと短い。紙面スペースの関係で，観測時間は 2002 年 12 月 24 日の 0:00:00～0:04:30UTC と，極めて短い。計算に必要なデータは，10 エポック（計測時刻）分だけしか与えられていない。それでも基線長が短いので, それなりの結果を得ることが可能である。精密軌道, 電離層補正, 大流圏補正はいずれも使用していない。観測点も静止点であるので，以下では座標が時間的に変動しないとするスタティック解析を行う。また, 各エポックにおける衛星の位置は, 放送歴（あるいは精密暦）により計算しないといけないが，ここでは別途計算されている値を用いる。

［例題 1］：擬似距離による単独測位（不定性のない場合）

衛星時計のバイアスを無視して(5.14)式を書き直すと

$$
\begin{aligned}
&(\nabla P)_a^{i\,N_S-1} - ((\nabla \boldsymbol{r})_a^{i\,N_S-1})_0 \\
&\quad = \left[-(e_{a,x}^i)_0 + (e_{a,x}^{N_S-1})_0\right]dx_a + \left[-(e_{a,y}^i)_0 + (e_{a,y}^{N_S-1})_0\right]dy_a + \left[-(e_{a,z}^i)_0 + (e_{a,z}^{N_S-1})_0\right]dz_a \\
&\qquad + (\nabla \boldsymbol{e})_a^{i\,N_S-1}, \qquad\qquad i = 0,1,N_S-2;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \qquad (5.15a)
\end{aligned}
$$

$$
(\boldsymbol{r}_a^i)_0 = \sqrt{\left(x^i - (x_a)_0\right)^2 + \left(y^i - (y_a)_0\right)^2 + \left(z^i - (z_a)_0\right)^2}, \quad i = 0,1,N_S-1;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \quad (5.15b)
$$

$$
\left.\begin{matrix} (e_{a,x}^i)_0 \\ (e_{a,y}^i)_0 \\ (e_{a,z}^i)_0 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{(\boldsymbol{r}_a^i)_0} \left\{\begin{matrix} x^i - (x_a)_0 \\ y^i - (y_a)_0 \\ z^i - (z_a)_0 \end{matrix}\right\}, \qquad i = 0,1,N_S-1;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \qquad (5.15c)
$$

となる。

計算に必要なデータは，表 5.1～3 により与えられる。この例では，使用する衛星は PRN06，PRN14，PRN25，PRN30 で，衛星数 N_S は 4 である。各エポックで 3 個の方程式(5.15a)式が得られるので，受信機の座標を各エポックで決定できる。受信機座標の計算結果を, 表 5.4 に示す。各エポックで解かないで, 全エポックでまとめて解いてもよい。この場合の未知数は 3 個，方程式は 30 個であるので，最小二乗法を用いる。付録 A の(A.8)式にあるように，この場合の重み行列$[p]$は，単位行列ではない。

表 5.1a　基準点受信機で求めた L1 波擬似距離 P_0^i の観測値

GPS time	P_0^0 : PRN06	P_0^1 : PRN14	P_0^2 : PRN25	P_0^3 : PRN30
0:00:00	22113804.059	20533943.126	22551966.763	21104631.277
0:00:30	22113640.394	20545986.413	22550310.017	21124879.945
0:01:00	22113563.377	20558132.467	22548669.325	21145193.784
0:01:30	22113572.798	20570379.739	22547043.400	21165572.967
0:02:00	22113671.024	20582732.425	22545434.271	21186017.837
0:02:30	22113856.874	20595188.026	22543840.072	21206526.426
0:03:00	22114132.088	20607746.907	22542262.626	21227100.921
0:03:30	22114495.248	20620408.973	22540700.474	21247738.499
0:04:00	22114947.455	20633174.265	22539154.164	21268439.266

0:04:30	22115488.966	20646043.284	22537624.567	21289202.666

表 5.1b　観測点受信機で求めた L1 波擬似距離 P_1^i の観測値

GPS time	P_1^0 : PRN06	P_1^1 : PRN14	P_1^2 : PRN25	P_1^3 : PRN30
0:00:00	21917475.849	20339448.059	22359795.067	20909718.197
0:00:30	21908401.850	20342570.795	22349218.847	20921049.530
0:01:00	21899412.553	20345793.705	22338655.549	20932443.893
0:01:30	21890506.990	20349116.616	22328105.045	20943900.527
0:02:00	21881685.927	20352540.135	22317566.873	20955419.325
0:02:30	21872950.321	20356064.251	22307041.987	20967000.068
0:03:00	21864299.844	20359688.622	22296529.637	20978641.774
0:03:30	21855735.607	20363413.026	22286030.439	20990344.653
0:04:00	21847256.789	20367238.056	22275543.932	21002107.199
0:04:30	21838864.432	20371162.713	22265070.480	21013929.741

表 5.2a　放送歴で求めた衛星 PRN06 の座標 (x^0, y^0, z^0) の計算値

GPS time	x^0	y^0	z^0
0:00:00	-25645235.388	5160542.820	5258937.060
0:00:30	-25630190.567	5144785.722	5349530.937
0:01:00	-25614853.644	5128889.623	5440023.773
0:01:30	-25599225.475	5112853.478	5530413.862
0:02:00	-25583306.922	5096676.245	5620699.505
0:02:30	-25567098.858	5080356.890	5710879.001
0:03:00	-25550602.162	5063894.384	5800950.655
0:03:30	-25533817.723	5047287.702	5890912.771
0:04:00	-25516746.438	5030535.827	5980763.658
0:04:30	-25499389.211	5013637.748	6070501.624

表 5.2b　放送歴で求めた衛星 PRN14 の座標 (x^1, y^1, z^1) の計算値

GPS time	x^1	y^1	z^1
0:00:00	-17686584.628	15364153.897	12599094.641
0:00:30	-17733406.337	15374332.695	12520492.532
0:01:00	-17779930.438	15384496.265	12441651.756
0:01:30	-17826156.335	15394643.156	12362573.814
0:02:00	-17872083.441	15404771.916	12283260.210
0:02:30	-17917711.181	15414881.087	12203712.456
0:03:00	-17963038.988	15424969.214	12123932.066
0:03:30	-18008066.309	15435034.835	12043920.558
0:04:00	-18052792.600	15445076.489	11963679.456
0:04:30	-18097217.327	15455092.712	11883210.287

表 5.2c　放送歴で求めた衛星 PRN25 の座標 (x^2, y^2, z^2) の計算値

GPS time	x^2	y^2	z^2

0:00:00	880807.878	18371396.133	19518249.977
0:00:30	820078.734	18331617.628	19558641.656
0:01:00	759164.255	18291852.100	19598669.585
0:01:30	698065.344	18252100.918	19638333.033
0:02:00	636782.910	18212365.446	19677631.272
0:02:30	575317.871	18172647.045	19716563.583
0:03:00	513671.153	18132947.069	19755129.254
0:03:30	451843.692	18093266.870	19793327.578
0:04:00	389836.432	18053607.794	19831157.855
0:04:30	327650.323	18013971.183	19868619.392

表 5.2d　放送歴で求めた衛星 PRN30 の座標 (x^3, y^3, z^3) の計算値

GPS time	x^3	y^3	z^3
0:00:00	-15881968.799	4064154.553	20667613.765
0:00:30	-15871868.715	3984235.449	20690932.300
0:01:00	-15861884.385	3904213.632	20713846.506
0:01:30	-15852016.399	3824090.598	20736355.974
0:02:00	-15842265.346	3743868.391	20758460.196
0:02:30	-15832631.801	3663548.548	20780158.774
0:03:00	-15823116.329	3583132.772	20801451.283
0:03:30	-15813719.488	3502622.764	20822337.310
0:04:00	-15804441.827	3422020.235	20842816.448
0:04:30	-15795283.885	3341326.896	20862888.299

表 5.3a　基準点受信機で求めた L1 波擬似距離の衛星間 1 重差 $(\nabla P)_0^{i\,3}$ の計算値

GPS time	$(\nabla P)_0^{0\,3}$	$(\nabla P)_0^{1\,3}$	$(\nabla P)_0^{2\,3}$
0:00:00	1009172.782	-570688.151	1447335.486
0:00:30	988760.449	-578893.532	1425430.072
0:01:00	968369.593	-587061.317	1403475.541
0:01:30	947999.831	-595193.228	1381470.433
0:02:00	927653.187	-603285.412	1359416.434
0:02:30	907330.448	-611338.400	1337313.646
0:03:00	887031.167	-619354.014	1315161.705
0:03:30	866756.749	-627329.526	1292961.975
0:04:00	846508.189	-635265.001	1270714.898
0:04:30	826286.300	-643159.382	1248421.901

表 5.3b　観測点受信機で求めた L1 波擬似距離の衛星間 1 重差 $(\nabla P)_1^{i\,3}$ の計算値

GPS time	$(\nabla P)_1^{0\,3}$	$(\nabla P)_1^{1\,3}$	$(\nabla P)_1^{2\,3}$
0:00:00	1007757.652	-570270.138	1450076.870
0:00:30	987352.320	-578478.735	1428169.317
0:01:00	966968.660	-586650.188	1406211.656
0:01:30	946606.463	-594783.911	1384204.518

0:02:00	926266.602	-602879.190	1362147.548
0:02:30	905950.253	-610935.817	1340041.919
0:03:00	885658.070	-618953.152	1317887.863
0:03:30	865390.954	-626931.627	1295685.786
0:04:00	845149.590	-634869.143	1273436.733
0:04:30	824934.691	-642767.028	1251140.739

表 5.4a　単独測位で求めた基準点受信機座標(x_0, y_0, z_0)の計算値

GPS time	x_0	y_0	z_0
0:00:00	-3911766.238	3506183.898	3605398.163
0:00:30	-3911764.841	3506182.829	3605396.778
0:01:00	-3911764.854	3506181.870	3605396.930
0:01:30	-3911766.424	3506183.952	3605397.369
0:02:00	-3911766.388	3506183.383	3605397.431
0:02:30	-3911765.865	3506182.240	3605397.916
0:03:00	-3911766.577	3506183.817	3605398.408
0:03:30	-3911766.336	3506184.091	3605398.100
0:04:00	-3911766.092	3506184.416	3605397.947
0:04:30	-3911766.171	3506183.788	3605398.064
Average	-3911765.979	3506183.428	3605397.711
Correct	-3911734.724	3506191.310	3605380.265

表 5.4b　単独測位で求めた観測点受信機座標(x_1, y_1, z_1)の計算値

GPS time	x_1	y_1	z_1
0:00:00	-3913980.695	3504504.898	3604635.632
0:00:30	-3913980.217	3504504.570	3604635.098
0:01:00	-3913980.726	3504505.350	3604636.141
0:01:30	-3913981.577	3504505.895	3604636.964
0:02:00	-3913981.164	3504505.526	3604636.597
0:02:30	-3913981.139	3504505.405	3604636.617
0:03:00	-3913980.707	3504504.893	3604636.303
0:03:30	-3913981.334	3504506.029	3604636.851
0:04:00	-3913980.901	3504505.256	3604636.517
0:04:30	-3913981.731	3504506.214	3604636.932
Average	-3913981.019	3504505.404	3604636.365
Correct	-3913949.710	3504513.150	3604618.919

［例題 2］：擬似距離による相対測位（不定性のない場合）

(5.11)式を書き直すと

$$(\nabla\Delta P)_{01}^{i\,N_S-1} = (e_{0,x}^{i} - e_{0,x}^{N_S-1})\cdot\Delta x_{01} + (e_{0,y}^{i} - e_{0,y}^{N_S-1})\cdot\Delta y_{01} + (e_{0,z}^{i} - e_{0,z}^{N_S-1})\cdot\Delta z_{01}$$
$$+ (\nabla\Delta \boldsymbol{e})_{01}^{i\,N_S-1}, \qquad i = 0,1,\cdots,N_S-2 \qquad (5.16a)$$

$$\left.\begin{matrix} e^i_{0,x} \\ e^i_{0,y} \\ e^i_{0,z} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\rho^i_0}\left\{\begin{matrix} x^i - x_0 \\ y^i - y_0 \\ z^i - z_0 \end{matrix}\right\}, \qquad i = 0,1, N_S - 1;\ \alpha = 0,1 \qquad (5.16b)$$

$$\rho^i_0 = \sqrt{\left(x^i - x_0\right)^2 + \left(y^i - y_0\right)^2 + \left(z^i - z_0\right)^2}, \qquad i = 0,1, N_S - 1;\ \alpha = 0,1 \qquad (5.16c)$$

となる。

計算に必要なデータは，表 5.2 と表 5.5 により与えられる。前例と同様に，使用する衛星は PRN06，PRN14，PRN25，PRN30 で，衛星数 N_S は 4 である。各エポックで 3 個の受信機間 1 重差方程式(5.16a)式が 3 個得られるので，受信機の座標を各エポックで決定できる。各エポックで解かないで，全エポックでまとめて解いてもよい。 まとめて解いた結果を表 5.6 に示す。正しい基線長は 2881.326mである。エポック数が 10 よりも大きなときの結果も示されている。この場合の未知数は 3 個，方程式は 30 個であるので，最小二乗法を用いる。付録 A の(A.11)式にあるように，この場合の重み行列$[p]$は，単位行列ではない。

表 5.5　L1 波擬似距離$(\nabla\Delta P)^{i3}_{01}$ 2 重差の計算値

GPS time	$(\nabla\Delta P)^{03}_{01}$	$(\nabla\Delta P)^{13}_{01}$	$(\nabla\Delta P)^{23}_{01}$
0:00:00	1415.130	-418.013	-2741.384
0:00:30	1408.129	-414.797	-2739.245
0:01:00	1400.933	-411.129	-2736.115
0:01:30	1393.368	-409.317	-2734.085
0:02:00	1386.585	-406.222	-2731.114
0:02:30	1380.195	-402.583	-2728.273
0:03:00	1373.098	-400.861	-2726.158
0:03:30	1365.795	-397.899	-2723.811
0:04:00	1358.599	-395.857	-2721.834
0:04:30	1351.609	-392.354	-2718.838

表 5.6　L1 波擬似距離を用いた計算結果

No. of Epoch	10	30	60	120	Correct
Δx_{01}	-2215.031	-2215.190	-2215.280	-2215.133	-2214.987
Δy_{01}	-1678.039	-1677.936	-1677.907	-1677.974	-1678.160
Δz_{01}	-761.357	-761.193	-761.056	-761.365	-761.346
BL (Baseline Length)	2881.292	2881.311	2881.327	2881.334	2881.326

［例題 3］：位相距離による相対測位（不定性のある場合）

(5.11)式を書き直すと

$$(\nabla\Delta\Phi)_{01}^{i\,N_S-1} = (e_{0,x}^{i} - e_{0,x}^{N_S-1})\cdot\Delta x_{01} + (e_{0,y}^{i} - e_{0,y}^{N_S-1})\cdot\Delta y_{01} + (e_{0,z}^{i} - e_{0,z}^{N_S-1})\cdot\Delta z_{01}$$
$$+\ \boldsymbol{l}_1(\nabla\Delta N)_{01}^{i\,N_S-1} + (\nabla\Delta \boldsymbol{e})_{01}^{i\,N_S-1}, \qquad i = 0,1,\cdots,N_S-2 \tag{5.17a}$$

$$\left.\begin{matrix} e_{0,x}^{i} \\ e_{0,y}^{i} \\ e_{0,z}^{i} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\boldsymbol{r}_0^i}\left\{\begin{matrix} x^i - x_0 \\ y^i - y_0 \\ z^i - z_0 \end{matrix}\right\}, \qquad i = 0,1,N_S-1;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \tag{5.17b}$$

$$\boldsymbol{r}_0^i = \sqrt{\left(x^i - x_0\right)^2 + \left(y^i - y_0\right)^2 + \left(z^i - z_0\right)^2}, \qquad i = 0,1,N_S-1;\ \boldsymbol{a} = 0,1 \tag{5.17c}$$

となる。

計算に必要なデータは，表 5.2 と表 5.7～8 により与えられる。前例，前々例と同様に，使用する衛星は PRN06，PRN14，PRN25，PRN30 で，衛星数 N_S は 4 である。各エポックで 3 個の衛星受信機間 2 重差方程式(5.17a)式が 3 個得られるが, 受信機の座標と不定性が未知数で，未知数の数が 6 個であるので，各エポックでは未知数を決定できない。全エポックでまとめて解くことにする。 この場合の未知数は 6 個，方程式は 30 個であるので，最小二乗法を用いる。付録 A の(A.11)式にあるように，この場合の重み行列$[p]$は，単位行列ではない。まとめて解いた結果を表 5.9 に示す。FLOAT とあるのは，不定性を不動小数点数として求めた最小二乗法の結果であり，INTEGER とあるのは整数値に丸めた結果である。正しい基線長は 2881.326mである。エポック数が 10 よりも大きなときの結果も示されている。エポック数が増えると，座標や不定性の標準偏差が小さくなることが分かる。

表 5.7a　基準点受信機で求めた L1 波位相距離 Φ_0^i の観測値

GPS time	Φ_0^0: PRN06	Φ_0^1: PRN14	Φ_0^2: PRN25	Φ_0^3: PRN30
0:00:00	-849480.801	-362733.166	-466912.604	474180.413
0:00:30	-849644.137	-350690.289	-468568.980	494428.804
0:01:00	-849721.092	-338544.721	-470210.184	514742.646
0:01:30	-849711.330	-326296.482	-471836.173	535121.474
0:02:00	-849612.898	-313943.922	-473445.380	555566.413
0:02:30	-849427.303	-301488.934	-475039.594	576075.175
0:03:00	-849152.410	-288929.727	-476617.026	596649.076
0:03:30	-848789.140	-276267.564	-478178.905	617286.390
0:04:00	-848337.157	-263502.405	-479725.142	637986.670
0:04:30	-847795.449	-250633.632	-481254.990	658750.131

表 5.7b　観測点受信機で求めた L1 波位相距離 Φ_1^i の観測値

GPS time	Φ_1^0: PRN06	Φ_1^1: PRN14	Φ_1^2: PRN25	Φ_1^3: PRN30
0:00:00	-3296355.951	-4906791.965	-2945181.768	-4408492.900
0:00:30	-3305429.751	-4903669.363	-2955757.876	-4397161.760
0:01:00	-3314419.488	-4900446.392	-2966321.196	-4385767.546

0:01:30	-3323325.079	-4897123.314	-2976871.931	-4374310.971
0:02:00	-3332145.821	-4893699.747	-2987409.774	-4362792.163
0:02:30	-3340881.422	-4890175.763	-2997934.704	-4351211.604
0:03:00	-3349531.786	-4886551.622	-3008446.968	-4339570.015
0:03:30	-3358096.190	-4882826.942	-3018946.163	-4327867.489
0:04:00	-3366574.767	-4879002.147	-3029432.663	-4316104.931
0:04:30	-3374967.205	-4875077.319	-3039906.419	-4304282.826

表 5.8　L1 波位相距離$(\nabla\Delta\Phi)_{01}^{i3}$2 重差の計算値

GPS time	$(\nabla\Delta\Phi)_{01}^{03}$	$(\nabla\Delta\Phi)_{01}^{13}$	$(\nabla\Delta\Phi)_{01}^{23}$
0:00:00	-2435798.163	-338614.514	-2404404.149
0:00:30	-2435804.949	-338611.489	-2404401.668
0:01:00	-2435811.797	-338608.521	-2404399.180
0:01:30	-2435818.696	-338605.613	-2404396.688
0:02:00	-2435825.652	-338602.751	-2404394.181
0:02:30	-2435832.660	-338599.950	-2404391.670
0:03:00	-2435839.715	-338597.197	-2404389.149
0:03:30	-2435846.828	-338594.501	-2404386.621
0:04:00	-2435853.990	-338591.859	-2404384.080
0:04:30	-2435861.201	-338589.270	-2404381.529

表 5.9a　L1 波位相距離を用いた計算結果（FLOAT 解）

No. of Epoch	10	30	60	120	Correct
$\Delta\hat{x}_{01}$	-2214.978	-2214.939	-2214.934	-2214.965	
$\Delta\hat{y}_{01}$	-1678.228	-1678.145	-1678.174	-1678.143	
$\Delta\hat{z}_{01}$	-761.382	-761.329	-761.348	-761.343	
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{03}$	-12807639.150	-12807638.877	-12807638.922	-12807638.991	
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{13}$	-1777234.897	-1777235.010	-1777234.954	-1777235.077	
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{23}$	-12620822.809	-12620823.224	-12620823.147	-12620823.148	
BL (FLOAT)	2881.368	2881.275	2881.293	2881.298	

表 5.9b　L1 波位相距離を用いた計算結果（INTEGER 解）

No. of Epoch	10	30	60	120	Correct
$\Delta\hat{x}_{01}$	-2214.980	-2214.979	-2214.979	-2214.981	-2214.987
$\Delta\hat{y}_{01}$	-1678.163	-1678.166	-1678.168	-1678.166	-1678.160
$\Delta\hat{z}_{01}$	-761.336	-761.341	-761.340	-761.344	-761.346
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{03}$	-12807639.0	-12807639.0	-12807639.0	-12807639.0	
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{13}$	-1777235.0	-1777235.0	-1777235.0	-1777235.0	
$(\nabla\Delta\hat{N})_{01}^{23}$	-12620823.0	-12620823.0	-12620823.0	-12620823.0	
BL (INTEGER)	2881.319	2881.321	2881.323	2881.324	2881.326

表 5.10a　標準偏差計算結果（FLOAT 解）

No. of Epoch	10	30	60	120
$\hat{s}_0$	0.001669	0.001867	0.002184	0.003125
$\hat{s}_{\Delta x_{01}}$	0.078304	0.015704	0.005936	0.002594
$\hat{s}_{\Delta y_{01}}$	0.072356	0.015100	0.006160	0.003278
$\hat{s}_{\Delta z_{01}}$	0.033799	0.007112	0.002892	0.001465
$\hat{s}_{(\nabla\Delta N)_{01}^{03}}$	0.170593	0.034173	0.013023	0.006171
$\hat{s}(_{\nabla\Delta N)_{01}^{13}}$	0.198127	0.044437	0.020259	0.013029
$\hat{s}_{(\nabla\Delta N)_{01}^{23}}$	0.495766	0.097967	0.036777	0.017221

表 5.10b　標準偏差計算結果（INTEGER 解）

No. of Epoch	10	30	60	120
$\hat{s}_0$	0.001651	0.001970	0.002620	0.003423
$\hat{s}_{\Delta x_{01}}$	0.077491	0.016577	0.007122	0.002842
$\hat{s}_{\Delta y_{01}}$	0.071605	0.015940	0.007391	0.003592
$\hat{s}_{\Delta z_{01}}$	0.033450	0.007507	0.003469	0.001605

参考文献

[1]　田島稔，小牧和雄，「最小二乗法の理論とその応用（改訂版）」，東洋書店（1996）
[2]　P. Misra & P. Enge, “Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance”, Ganga-Jamuna Press (2001)

付録 A　2 重差観測値内の相関（[2]の p.243）

GPS の場合を例として取り上げる。e_a^i は衛星 i と受信機 a 間距離の観測値 f_a^i の誤差とする。以下に，観測値の 0 重差が無相関ならば受信機間 1 重差も無相関であるが，衛星間 1 重差と 2 重差は無相関ではないことを示す。

観測値は相互に独立で分散を $s_f{}^2$ とする。すなわち

$$E\left\langle e_a^i e_b^j \right\rangle = s_f{}^2 d_{ij} d_{ab} \tag{A.1}$$

とする。行列を用いて

$$E\left\langle \{e\}\{e\}^T \right\rangle = s_f{}^2 [I] \tag{A.2}$$

と書くことにする。ここで，$\{e\} = [e_a^i, e_b^i, \cdots, e_a^l, e_b^l]^T$，$[I]$ は単位行列である。

観測値 f_a^i の誤差 e_a^i の受信機間 1 重差 $(\Delta e)_{ab}^i$ を

$$(\Delta \boldsymbol{e})_{ab}^{i} = \boldsymbol{e}_a^i - \boldsymbol{e}_b^i \tag{A.3}$$

により定義すると

$$\{\Delta \boldsymbol{e}\} = \begin{Bmatrix} (\Delta \boldsymbol{e})_{ab}^{i} \\ (\Delta \boldsymbol{e})_{ab}^{j} \\ (\Delta \boldsymbol{e})_{ab}^{k} \\ (\Delta \boldsymbol{e})_{ab}^{l} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_a^i \\ \boldsymbol{e}_b^i \\ \boldsymbol{e}_a^j \\ \boldsymbol{e}_b^j \\ \boldsymbol{e}_a^k \\ \boldsymbol{e}_b^k \\ \boldsymbol{e}_a^l \\ \boldsymbol{e}_b^l \end{Bmatrix} \tag{A.4}$$

であるので

$$E\left\langle \{\Delta \boldsymbol{e}\}\{\Delta \boldsymbol{e}\}^T \right\rangle$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} E\left\langle \{\boldsymbol{e}\}\{\boldsymbol{e}\}^T \right\rangle \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 2\boldsymbol{s}_f{}^2[I] \tag{A.5}$$

を得る。

観測値 $\boldsymbol{f}_a^i$ の誤差 $\boldsymbol{e}_a^i$ の衛星間 1 重差 $(\nabla \boldsymbol{e})_a^{il}$ を

$$(\nabla \boldsymbol{e})_a^{il} = \boldsymbol{e}_a^i - \boldsymbol{e}_a^l \tag{A.6}$$

により定義すると

$$\{\nabla \boldsymbol{e}\} = \begin{Bmatrix} (\nabla \boldsymbol{e})_a^{il} \\ (\nabla \boldsymbol{e})_a^{jl} \\ (\nabla \boldsymbol{e})_a^{kl} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{e}_a^i \\ \boldsymbol{e}_a^j \\ \boldsymbol{e}_a^k \\ \boldsymbol{e}_a^l \end{Bmatrix} \tag{A.7}$$

であるので

$$E\left\langle\{\nabla e\}\{\nabla e\}^T\right\rangle$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}E\left\langle\{e\}\{e\}^T\right\rangle\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=s_f{}^2\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \tag{A.8}$$

を得る。

観測値 f_a^i の誤差 e_a^i の受信機間衛星間 2 重差を

$$(\nabla\Delta e)_{ab}^{ij}=(\Delta e)_{ab}^{i}-(\Delta e)_{ab}^{j} \tag{A.9}$$

で定義すると

$$\{\nabla\Delta e\}=\begin{bmatrix}(\nabla\Delta e)_{ab}^{il}\\(\nabla\Delta e)_{ab}^{jl}\\(\nabla\Delta e)_{ab}^{kl}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(\Delta e)_{ab}^{i}\\(\Delta e)_{ab}^{j}\\(\Delta e)_{ab}^{k}\\(\Delta e)_{ab}^{l}\end{bmatrix} \tag{A.10}$$

であるので

$$E\left\langle\{\nabla\Delta e\}\{\nabla\Delta e\}^T\right\rangle$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0&-1\\0&1&0&-1\\0&0&1&-1\end{bmatrix}E\left\langle\{\Delta e\}\{\Delta e\}^T\right\rangle\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\-1&-1&-1\end{bmatrix}=2s_f{}^2\begin{bmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{bmatrix} \tag{A.11}$$

を得る。

(A.8)式は同一観測時刻内での相関であるが，異なる観測時刻間では無相関と考えてよい。

付録 B　行列の性質

行列演算の基本的性質をまとめておく。

（1）行列の積の転置

行列$[a]$と$[b]$の積に関して

$$([a][b])^T=[b]^T[a]^T \tag{B.1}$$

が成り立つ。

（2）逆行列の転置

任意の正則行列$[a]$に対して

$$[I]=[I]^T=([a][a]^{-1})^T=([a]^{-1})^T[a]^T \tag{B.2}$$

であるので

$$([a]^{-1})^T = ([a]^T)^{-1} \tag{B.3}$$

が成り立つ。

（3）正定値対称行列の逆行列

正定値対称行列$[p]$は

$$[p] = [p^{1/2}][p^{1/2}]^T \tag{B.4}$$

のように分解される。例えば，下半分３角行列を考えればよい。(B.1)式と(B.3)式より

$$[p]^{-1} = ([p^{1/2}]^T)^{-1}[p^{1/2}]^{-1} = ([p^{1/2}]^{-1})^T[p^{1/2}]^{-1} \tag{B.5}$$

が求まる。要素については

$$[p]^{-1}{}_{kl} = \sum_k ([p^{1/2}]^{-1})^T{}_{kk}[p^{1/2}]^{-1}{}_{kl} = \sum_k [p^{1/2}]^{-1}{}_{kk}[p^{1/2}]^{-1}{}_{kl} \tag{B.6}$$

と書ける。

付録 C　行列のランクとトレース（[1]の p.43）

$[a]$ がべき等行列のとき

$$tr([a]) = rank([a]) \tag{2.15}$$

がいえる。このことを以下に証明する。

n 行 n 列の行列 $[a]$ の列を $\{a_i\}$，$i = 1,2,\cdots,n$ とし，列ベクトル $\{x\}$ の要素を $x_i, \cdots i = 1,2,\cdots,n$ とすると

$$\{\bar{x}\} = [a]\{x\} = \{a_1\}x_1 + \{a_2\}x_2 + \cdots + \{a_n\}x_n \tag{C.1}$$

であるので，列ベクトル$\{a_i\}$，$i = 1,2,\cdots,n$のうち独立なものの数，すなわち行列$[a]$のランクをrとすると，(C.1)式はn次元空間V^nのr次元部分空間W^rを定義する。W^rの補空間をW^{n-r}，すなわち

$$V^n = W^r + W^{n-r} \tag{C.2}$$

とする。

(C.1)式の両辺に行列$[a]$を掛けると

$$[a]\{\bar{x}\} = [a]^2\{x\} \tag{C.3}$$

であるが，任意の$\{x\}$に対して

$$[a]^2\{x\}=[a]\{x\} \tag{C.4}$$

であることの必要十分条件は，$[a]$がべき等行列であることである。したがって，$[a]$がべき等行列であるとき

$$[a]\{\bar{x}\}=\{\bar{x}\} \tag{C.5}$$

が言えることになる。n次元単位行列を$[I]$とするとき

$$([I]-[a])\{x\}=\{x\}-\{\bar{x}\} \tag{C.6}$$

であるので，行列$[a]$および行列$[I]-[a]$により，任意のベクトル$\{x\}$が部分空間W^rの成分とその補空間W^{n-r}の成分に分解されることになる。

W^rに適当に取られた正規直交系を$\{p_i\}$, $i=1,2,\cdots,r$ ， W^{n-r}に取られたそれを$\{p_i\}$, $i=r+1,r+2,\cdots,n$とし，これらを列とするn行n列の行列を$[p]$とすると

$$[a][p]=[\{p_1\},\{p_2\},\cdots,\{p_r\},0,0,\cdots,0]=[p]\begin{bmatrix}1 & & & & & & & \\ & 1 & & & 0 & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 0 & & & \\ & & & & & 0 & & \\ & 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 0\end{bmatrix} \tag{C.7}$$

となる。(C.7)式の両辺に$[p]^{-1}$を掛けると

$$[p]^{-1}[a][p]=[I^r] \tag{C.8}$$

が求まる。ここで，$[I^r]$は

$$[I^r]_{ij}=\begin{cases}1, & i=j=1,2,\cdots,r \\ 0, & otherwise\end{cases} \tag{C.9}$$

とする。

一方，任意のn行n列行列$[c]$, $[d]$に関して

$$tr([c][d])=\sum_i\sum_k c_{ik}d_{ki}=\sum_i\sum_k d_{ki}c_{ik}=\sum_k\sum_i d_{ik}c_{ki}=tr([d][c]) \tag{C.10}$$

であるので

$$tr([p]^{-1}[a][p])=tr(([p]^{-1}[a])[p])=tr([p]([p]^{-1}[a]))=tr([a]) \tag{C.11}$$

を得る。この式と(C.8)式より

$$r = rank([a]) = tr([a]) \tag{C.12}$$

が求まる。

一方，$[p]$の列，$\{p_i\}$，$i = 1,2,\cdots,n$ はn次元空間V^nの正規直交系であるから

$$[p] = [p]^T \tag{C.13a}$$

$$[p]^2 = [I] \tag{C.13b}$$

$$[p]^{-1} = [p] \tag{C.13c}$$

である。

付録 D　確率変数の線形結合の分布（[1]の p.90）

確率変数$\{x\} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ がn次元正規分布$N(\{m\},[s])$をするとき，k次元列ベクトル$\{a\}$ およびk行n列の行列$[b]$によって作られる確率変数$\{y\} = \{a\} + [b]\{x\}$ は，正規分布$N(\{a\}+[b]\{m\},[b][s][b]^T)$にしたがう。このことを以下に証明する。

確率変数$\{y\}$ の期待値をとると

$$E\langle\{y\}\rangle = \{a\} + [b]E\langle\{x\}\rangle = \{a\} + [b]\{m\} \tag{D.1}$$

を得る。分散は

$$\begin{aligned} E\left\langle(\{y\}-\{a\}-[b]\{m\})(\{y\}-\{a\}-[b]\{m\})^T\right\rangle &= E\left\langle[b]\{x-m\}\{x-m\}^T[b]^T\right\rangle^T \\ &= [b]E\left\langle\{x-m\}\{x-m\}^T\right\rangle[b]^T = [b][s][b]^T \end{aligned} \tag{D.2}$$

となる。

付録 E　確率変数の 2 次形式が c^2 分布になるための必要十分条件（[1]の p.104）

n次元列ベクトル$\{x\} = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T$ の各要素が独立で正規分布$N(0,1)$に従うとき，n行n列の対象行列$[a]$により作られる 2 次形式統計量$\{x\}^T[a]\{x\}$がc^2分布に従う必要十分条件は，$[a]$がべき等行列，すなわち$[a]^2 = [a]$となることである。c^2分布（付録 F）の自由度は$rank[a] = tr[a]$に等しい。このことを以下に証明する。

$[a]$がn行n列のべき等であるとき，付録 C の(C.8)式より

$$\begin{aligned} \{x\}^T[a]\{x\} &= \{x\}^T[p]^{-1}[p][a][p][p]^{-1}\{x\} \\ &= ([p]^{-1}\{x\})^T[I^r][p]^{-1}\{x\} \end{aligned} \tag{E.1}$$

を得る。ここで，$r = rank([a]) = tr([a])$とする。付録 D と付録 C の(C.13)式より

$$E\langle[p]^{-1}\{x\}\rangle = 0 \tag{E.2a}$$

$$E\left\langle [p]^{-1}\{x\}\left([p]^{-1}\{x\}\right)^T \right\rangle = [p]^{-1}E\left\langle \{x\}\{x\}^T \right\rangle ([p]^{-1})^T = [I] \qquad \text{(E.2b)}$$

となる。すなわち，$[p]^{-1}\{x\}$ の各要素は正規分布 $N(0,1)$ に従う。

列ベクトル $[p]^{-1}\{x\}$ の要素を y_i，$1,2,\cdots,n$ とすると

$$\{x\}^T[a]\{x\} = \left([p]^{-1}\{x\}\right)^T [I^r][p]^{-1}\{x\} = \{y\}^T[I^r]\{y\} = \sum_{i=1}^{r} {y_i}^2 \qquad \text{(E.3)}$$

となるので, 定義により $\{x\}^T[a]\{x\}$ は自由度 $r = rank[a] = tr[a]$ の χ^2 分布に従う（付録 F）。

付録 F　χ^2 分布（[1]の p.101）

確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，平均値 0，分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，その二乗和

$$\chi^2 = {X_1}^2 + {X_2}^2 + \cdots + {X_n}^2 \qquad \text{(F.1)}$$

は，自由度 n の χ^2（カイ二乗）に従う。その密度関数 $f(x)$ は

$$f(x) = \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \qquad (0 < x < \infty) \qquad \text{(F.2)}$$

で与えられる。ここで，Γ はガンマ関数と呼ばれ，その定義は

$$\Gamma(k) = \int_0^\infty x^{k-1} e^{-x} dx \qquad \text{(F.3)}$$

であり

$$\Gamma(k) = (k-1)\Gamma(k-1) \qquad \text{(F.4a)}$$
$$\Gamma(1) = 1 \qquad \text{(F.4b)}$$
$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi} \qquad \text{(F.4c)}$$

という性質がある。

(F.2)式は以下のように導かれる。確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ が独立で，平均値 0，分散 1 の正規分布 $N(0,1)$ に従うので，同時分布は

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-\frac{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \cdots + {x_n}^2}{2}} \qquad \text{(F.5)}$$

で与えられる。ここで

$$Y_1 = X_1{}^2 + X_2{}^2 + \cdots + X_n{}^2 \tag{F.6a}$$

$$Y_k = \frac{X_k}{\sqrt{X_1{}^2 + X_2{}^2 + \cdots + X_n{}^2}}, \qquad (k = 2,3,\cdots,n) \tag{F.6b}$$

という変数変換を行う。逆変換は

$$X_1 = \pm\sqrt{Y_1(1 - Y_2{}^2 - Y_3{}^2 - \cdots - Y_n{}^2)} \tag{F.7a}$$

$$X_k = \sqrt{Y_1}\,Y_k, \qquad (k = 2,3,\cdots,n) \tag{F.7b}$$

であるので，ヤコビアンは

$$\frac{\partial(x_1, x_2, \cdots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \cdots, y_n)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \begin{vmatrix} \dfrac{\sqrt{1 - y_2{}^2 - \cdots - y_n{}^2}}{2\sqrt{y_1}} & \dfrac{-\sqrt{y_1}\,y_2}{\sqrt{1 - y_2{}^2 - \cdots - y_n{}^2}} & \cdots & \dfrac{-\sqrt{y_1}\,y_n}{\sqrt{1 - y_2{}^2 - \cdots - y_n{}^2}} \\ \dfrac{y_2}{2\sqrt{y_1}} & \sqrt{y_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{y_n}{2\sqrt{y_1}} & 0 & \cdots & \sqrt{y_1} \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{y_1^{\frac{n}{2}-1}}{2\sqrt{1 - y_2{}^2 - \cdots - y_n{}^2}} \tag{F.8}$$

となる。したがって，(F.7)式に示されるように，一つの $y_1, y_2, \cdots, y_n$ に対して二つの $x_1, x_2, \cdots, x_n$ があるので，確率変数 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ の密度関数は

$$g(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, y_1^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y_1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - y_2{}^2 - \cdots - y_n{}^2}},$$

$$y_1 > 0, \quad y_2{}^2 + \cdots + y_n{}^2 < 1 \tag{F.9}$$

と求まる。$y_2{}^2 + \cdots + y_n{}^2 < 1$ の範囲で積分し，y_1 を x で置き換えると(F.2)式が得られる。

χ^2 分布の平均値と分散は

$$E\left\langle (\boldsymbol{c}^2)^m \right\rangle = 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+m\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \tag{F.10}$$

であるので

$$E\left\langle \boldsymbol{c}^2 \right\rangle = n \tag{F.11a}$$

$$E\left\langle (\boldsymbol{c}^2 - n)^2 \right\rangle = 2n \tag{F.11b}$$

と求まる。

自由度nが大きくなるにつれて，$N(n,2n)$の正規分布に近づく。

図 F.1　$\boldsymbol{c}^2$分布の密度関数

付録 G　t分布（[1]の p.105）

XとYが独立で，Xは正規分布$N(0,1)$に従い，Yが自由度nの$\boldsymbol{c}^2$分布に従うとき

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{G.1}$$

は，自由度nのt分布となる。その密度関数$g_n(x)$は

$$g_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\boldsymbol{p}}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}, \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{G.2}$$

である。

平均値は$n \geq 1$で存在して，密度関数が偶関数であることより0であるが，分散は$n > 2$で存在して$n/(n-2)$となる。

(G.2)式は以下のように導かれる。確率変数XとYが独立であるので，同時分布は

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\boldsymbol{p}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \tag{G.3}$$

で与えられる。ここで

$$T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}} \tag{G.4}$$

とすると

$$X = T\sqrt{Y/n} \tag{G.5}$$

であるので

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(t,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial t} & \dfrac{\partial x}{\partial y} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t} & \dfrac{\partial y}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sqrt{\dfrac{y}{n}} & \dfrac{t}{2\sqrt{yn}} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sqrt{\frac{y}{n}} \tag{G.6}$$

となる。したがって，確率変数TとYの密度関数は

$$\begin{aligned} g(t,y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 y}{2n}} \frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} \sqrt{\frac{y}{n}} \\ &= \frac{1}{2^{(n+1)/2}\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} y^{\frac{n-1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{n}+1\right)y} \end{aligned} \tag{G.7}$$

となる。この密度関数をyについて0から∞まで積分し，tをxで置き換えると(G.2)式が得られる。

図 F.1　t分布の密度関数

付録 H　F 分布（[1]の p.107）

　XとYが独立で，Xが自由度mのχ^2分布，Yが自由度nのχ^2分布に従うとき

$$F = \frac{\dfrac{X}{m}}{\dfrac{Y}{n}} \tag{H.1}$$

の分布は，自由度(m,n)のF分布となる。その密度関数$h_{m,n}(x)$は

$$h_{m,n}(x) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+n}{2}\right) m^{m/2} n^{n/2}}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{n}{2}\right)} \frac{x^{\frac{m}{2}-1}}{(mx+n)^{\frac{m+n}{2}}}, \qquad (0 < x < \infty) \tag{H.2}$$

であり，平均値は$n/(n-2)$，$(n>2)$，分散は$\dfrac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$，$(n>4)$である。

(H.2)式は以下のように導かれる。確率変数XとYが独立であるので，同時分布は

$$f(x,y)=\frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}x^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}} \tag{H.3}$$

で与えられる。ここで

$$Z=\frac{X/m}{Y/n} \tag{H.4}$$

とすると

$$X=\frac{m}{n}ZY \tag{H.5}$$

であるので

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(z,y)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial x}{\partial y}\\ \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{m}{n}y & \frac{m}{n}z\\ 0 & 1\end{vmatrix}=\frac{m}{n}y \tag{H.6}$$

となる。したがって，確率変数ZとYの密度関数は

$$\begin{aligned}g(z,y)&=\frac{1}{2^{m/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}zy\right)^{\frac{m}{2}-1}e^{-\frac{m}{2n}zy}\frac{1}{2^{n/2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}y^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{y}{2}}\frac{m}{n}y\\&=\frac{1}{2^{(m+n)/2}\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}z^{\frac{m}{2}-1}y^{\frac{m+n}{2}-1}e^{-\left(1+\frac{m}{n}z\right)\frac{y}{2}}\end{aligned} \tag{H.7}$$

となる。この密度関数をyについて0から∞まで積分し，zをxで置き換えると(H.2)式が得られる。

付録 I　確率変数の分散行列を重みとする 2 次形式の分布（[1]の p.157）

確率変数ベクトル$\{X\}=[X_1,X_2,\cdots,X_m]$が$m$次元正規分布$N(\{m\},[\Sigma])$に従うとき，$(\{X\}-\{m\})^T[\Sigma]^{-1}(\{X\}-\{m\})$が自由度$m$の$c^2$分布に従うことを示す。

$[\Sigma]$は正定値対称行列であるので

$$[\Sigma] = [\Sigma^{1/2}][\Sigma^{1/2}]^T \tag{I.1}$$

と分解できる。$\{X\}$ を

$$\{Y\} = [\Sigma^{1/2}]^{-1}(\{X\} - \{m\}) \tag{I.2}$$

により，$\{Y\} = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_m]$ に変換すると，Y_i，$i = 1,2,\cdots,m$ はそれぞれ独立で正規分布 $N(0,1)$ に従う（付録 D)。さらに

$$\begin{aligned}
&(\{X\} - \{m\})^T [\Sigma]^{-1} (\{X\} - \{m\}) \\
&\quad = (\{X\} - \{m\})^T \left([\Sigma^{1/2}][\Sigma^{1/2}]^T\right)^{-1} (\{X\} - \{m\}) \\
&\quad = (\{X\} - \{m\})^T \left([\Sigma^{1/2}]^{-1}\right)^T [\Sigma^{1/2}]^{-1} (\{X\} - \{m\}) \\
&\quad = \{Y\}^T \{Y\}
\end{aligned} \tag{I.3}$$

であるので（付録 B)，$(\{X\} - \{m\})^T [\Sigma]^{-1} (\{X\} - \{m\})$ は自由度 m の c^2 分布に従う（付録 F)。