

観測方程式

1. 系統的観測誤差

前節では、衛星の軌道位置の求め方について述べた。衛星と受信機アンテナとの間の距離（レンジ）は、受信機により観測される。その際に、色々な誤差が混入する。受信機や衛星の時計に起因するもの、信号伝播路に起因するものなどである。後者は大気圏遅延（atmospheric delay）と呼ばれるが、電離層（ionosphere）および対流圏（troposphere）による電波の遅延である。表 1.1 に誤差の性質を示す。

表 1.1 信号伝播路における誤差の性質

誤差源	分散性	特徴
電離層	周波数の二乗に反比例	群速度は遅くなるが、位相速度は速くなる。2 周波数で観測を行うと、影響を除去できる。太陽活動の強い影響を受ける。
対流圏	なし。遅延は一定。	乾燥空気によるものと、水蒸気によるものがある。前者は 90%を占めていて、mm の精度で補正可能である。

電離層とその影響を図 1.1 と表 1.2 に示す。

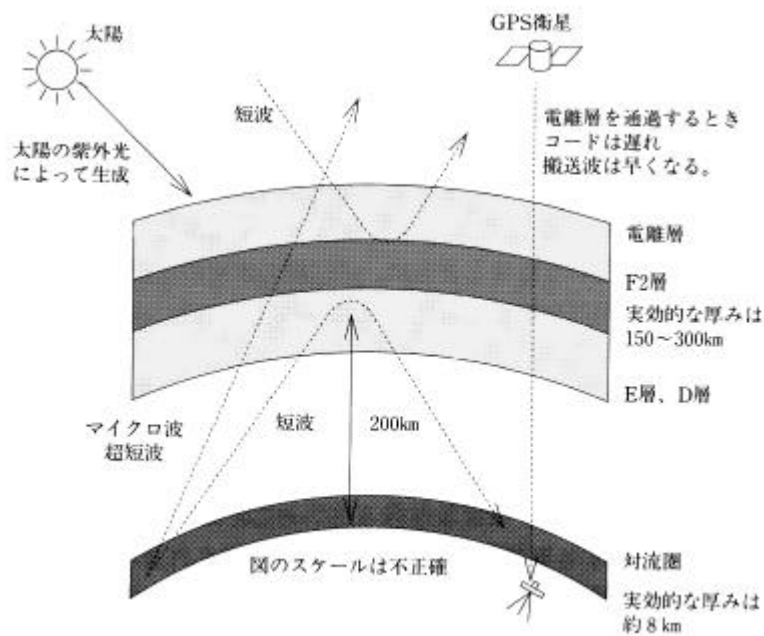


図 1.1 電離層（土屋，辻（1995））

表 1.2 電離層における天頂方向遅延量の例（土屋，辻（1995））
搬送波（位相速度）では負、コード（群速度）では正

f_oF_2, τ	太陽活動極大期昼 15MHz, 300km	太陽活動中間期 8 MHz, 200km	太陽活動極小期夜 3 MHz, 150km
L 1 帯 1575MHz	13.6m	2.6m	0.27m
L 2 帯 1227MHz	22.4m	4.2m	0.44m

乾燥大気による遅延を図 1.2 に示す。

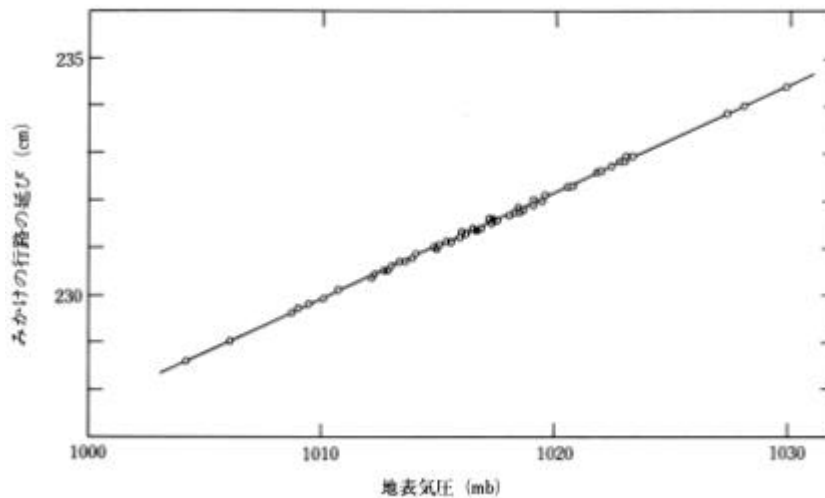


図 1.2 乾燥空気による行路遅延（土屋，辻（1995））

2. 系統的誤差の除去

図 2.1 に示されるような衛星と受信機の配置を考える。

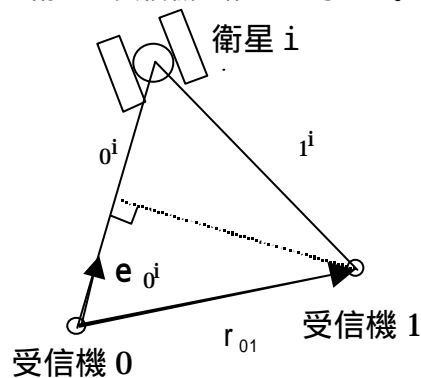


図 2.1 衛星と受信機の配置

信号受信時刻を t とし，衛星 i と受信機 a との間の L_k 波による擬似距離を $P_{ka}^i(t)$ ，位相距離を $\Phi_{ka}^i(t)$ ，衛星受信機間の真距離を $r_a^i(t)$ ， L_1 波の電離層遅延を $I_a^i(t)$ ，大気層遅延を $T_a^i(t)$ ，受信機 a の時計の進みを $d_a(t)$ ，衛星 i の時計の進みを $d^i(t)$ ，受信機 a のハ - ド

ウェア・バイアスを $b_{k_a}(t)$, 衛星 i のハードウェア・バイアスを $b_k^i(t)$, 真空中の電波の速度を c とすると, 2 周波 GPS 受信機による基本観測方程式は, 擬似距離および位相距離に対して

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{k_a}^i(t) \\ \Phi_{k_a}^i(t) \end{Bmatrix} &= \mathbf{r}_a^i(t) + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_k \end{pmatrix}^2 I_a^i(t) + T_a^i(t) + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{k_a}^i \end{Bmatrix} \\ &+ c\mathbf{d}_a(t) - c\mathbf{d}^i(t) + \begin{Bmatrix} cb_{k_a}(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} cb_k^i(t) \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} e_{k_a}^i(t) \\ \mathbf{e}_{k_a}^i(t) \end{Bmatrix}, \\ &\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1; \mathbf{a}=0,1 \end{aligned} \quad \begin{cases} (1a) \\ (1b) \end{cases}$$

で与えられる。ここで, N_s は衛星数, $\mathbf{a}=0$ は基準点, $\mathbf{a}=1$ は観測点を表わす。また

N_a^i : 波数のアンビギュイティ

e_a^i : その他の誤差

\mathbf{e}_a^i : その他の誤差

とする。 f_k と \mathbf{I}_k は L_k 波の周波数と波長である。マルチパスによる誤差も考えるべきであるが, 省略している。また, 衛星の軌道推定誤差も, 必要に応じて考える必要がある。 $e_{k_a}^i(t)$ と $\mathbf{e}_{k_a}^i(t)$ はノイズ成分であり, $\mathbf{s}(e_{k_a}^i(t)) \approx 1m$, $\mathbf{s}(\mathbf{e}_{k_a}^i(t)) \approx 1cm$ である。すなわち, 前者は後者よりも二桁近く大きい。受信機時計の読み t_a および衛星時計の読み t^i と正確な時間 t との関係は

$$t_a = t + \mathbf{d}_a \quad (2a)$$

$$t^i = t + \mathbf{d}^i \quad (2b)$$

である。

正確にいうと, \mathbf{r}_a^i は時刻 $t - \mathbf{t}_a^i$ における衛星 i の位置と時刻 t における受信機 \mathbf{a} との間の距離の真値である。ここで, \mathbf{t}_a^i は信号が衛星 i を発信して受信機 \mathbf{a} に到達するのに要する時間で

$$c\mathbf{t}_a^i = \left| \mathbf{r}^i(t - \mathbf{t}_a^i) - \mathbf{r}_a(t) \right| \approx \left| \mathbf{r}^i(t) - \mathbf{r}_a(t) - \dot{\mathbf{r}}^i(t)\mathbf{t}_a^i \right| \quad (3)$$

を解いて求める。 \mathbf{r}^i および \mathbf{r}_a は, 衛星 i および受信機 \mathbf{a} の位置ベクトルである。 $\dot{\mathbf{r}}^i$ は衛星 i の速度である。(3)式の両辺を二乗して書き直すと, \mathbf{t}_a^i に関する 2 次方程式

$$\left(c^2 - \left| \dot{\mathbf{r}}^i(t) \right|^2 \right) \mathbf{t}_a^i{}^2 + 2(\mathbf{r}^i(t) - \mathbf{r}_a(t)) \dot{\mathbf{r}}^i(t) \mathbf{t}_a^i - \left| \mathbf{r}^i(t) - \mathbf{r}_a(t) \right|^2 = 0 \quad (4)$$

を得る。 $\mathbf{r}^i(t)$ と $\dot{\mathbf{r}}^i(t)$ は, 衛星の軌道計算から求まる。また, $\mathbf{r}_a(t)$ は, コードによる単独測位によっても数 10m の精度で求まる。これを繰り返し計算の出発値とすればよい。

(1)式の右辺の第 2 項以下の誤差項が無視できる時には, 観測方程式において

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} P_{ka}^i \\ \Phi_{ka}^i \end{Bmatrix} = \sqrt{(x^i - x_a)^2 + (y^i - y_a)^2 + (z^i - z_a)^2} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ N_a^i \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1 \end{cases} \begin{cases} (5a) \\ (5b) \end{cases}$$

とすれば、擬似距離あるいは位相距離の計測値を用いて、 R_a 点の座標 (x_a, y_a, z_a) を求めることができる。 (x^i, y^i, z^i) は時刻 $t - \mathbf{t}_a^i$ における衛星 i の座標である。これが単独測位の観測方程式である。コード計測値を用いる場合には、未知数は受信機の座標 (x_a, y_a, z_a) 成分 3 個であるので、最低 3 個の衛星を捕捉できればよい。

しかし、一般に受信機にはコスト的にもスペ - 的にも高価な時計を採用できないので、受信機 \mathbf{a} の時計の進み $\mathbf{d}_a(t)$ は大きい。そのような場合には、 $\mathbf{d}_a(t)$ も未知数として

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} P_{ka}^i \\ \Phi_{ka}^i \end{Bmatrix} = \sqrt{(x^i - x_a)^2 + (y^i - y_a)^2 + (z^i - z_a)^2} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ N_a^i \end{Bmatrix} + c\mathbf{d}_a(t), \\ \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1 \end{cases} \begin{cases} (6a) \\ (6b) \end{cases}$$

を考えればよい。このときには、副産物として $\mathbf{d}_a(t)$ が求まる。この場合には、4 個以上の衛星を捕捉できれば、コード測位が可能となる。位相距離の計測値は精度が高いので、誤差に対する要求も厳しくなるので、(5b)式や(6b)式が用いられることは無い。

ノイズが無視できないときには、以下に述べる工夫をすればよい。すなわち、 d^i は \mathbf{a} に依らないので、 d^i を消去するためには、 \mathbf{a} 間 (受信機間) の 1 重差を取ればよい。すなわち

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} (\Delta P_k)_{01}^i \\ (\Delta \Phi)_{k01}^i \end{Bmatrix} = (\Delta \mathbf{r})_{01}^i + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_k \end{Bmatrix} (\Delta I)_{01}^i + (\Delta T)_{01}^i + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ (\Delta N_k)_{01}^i \end{Bmatrix} \\ + c(\Delta \mathbf{d})_{01} + \begin{Bmatrix} c(\Delta b_k)_{01} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\Delta e_k)_{01}^i \\ (\Delta \mathbf{e}_k)_{01}^i \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1 \end{cases} \begin{cases} (7a) \\ (7b) \end{cases}$$

を考えればよい。ここで

$$(\Delta \bullet)_{ab} = (\bullet)_a - (\bullet)_b \quad (8)$$

とする。(7)式の右辺第 2 項以下の誤差項が無視できるとすると

$$\begin{cases} \begin{Bmatrix} (\Delta P_k)_{01}^i \\ (\Delta \Phi)_{k01}^i \end{Bmatrix} \approx (\Delta \mathbf{r})_{01}^i + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ (\Delta N)_{01}^i \end{Bmatrix}, \\ \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1 \end{cases} \begin{cases} (9a) \\ (9b) \end{cases}$$

を得る。(9)式の具体的な形は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{k0}^i - P_{k1}^i \\ \Phi_{k0}^i - \Phi_{k1}^i \end{Bmatrix} &\approx \sqrt{(x^i - x_0)^2 + (y^i - y_0)^2 + (z^i - z_0)^2} \\ &\quad - \sqrt{(x^i - x_1)^2 + (y^i - y_1)^2 + (z^i - z_1)^2} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{k0}^i - N_{k1}^i \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad \begin{cases} (10a) \\ (10b) \end{cases}$$

$$\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1$$

である。

d_a は i に依らないので, d_a を消去するためには, i 間 (衛星間) の 1 重差を取ればよい。すなわち, 衛星 i と衛星 $N_s - 1$ の差を取ることにすると

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (\nabla P_k)_a^{iN_s-1} \\ (\nabla \Phi_k)_a^{iN_s-1} \end{Bmatrix} &= (\nabla \mathbf{r})_a^{iN_s-1} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_k \end{Bmatrix} (\nabla I)_a^{iN_s-1} + (\nabla T)_a^{iN_s-1} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ (\nabla N_k)_a^{iN_s-1} \end{Bmatrix} \\ &\quad - c(\nabla \mathbf{d})^{iN_s-1} + \begin{Bmatrix} c(\nabla b_k)^{iN_s-1} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} (\nabla e_k)_a^{iN_s-1} \\ (\nabla \mathbf{e}_k)_a^{iN_s-1} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad \begin{cases} (11a) \\ (11b) \end{cases}$$

$$\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-2; \mathbf{a}=0,1$$

を考えればよい。2 番目の衛星 (参照衛星) の取り方にはいろいろ考えられ。高度の一番大きなものが選ばれることが多い。ここで

$$(\nabla \bullet)^{ij} = (\bullet)^i - (\bullet)^j \quad (12)$$

とする。(11)式の右辺第 2 項以下の誤差項が無視できるとすると

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (\nabla P_k)_a^{iN_s-1} \\ (\nabla \Phi_k)_a^{iN_s-1} \end{Bmatrix} &\approx (\nabla \mathbf{r})_a^{iN_s-1} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ (\nabla N_k)_a^{iN_s-1} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-2 \end{aligned} \quad \begin{cases} (13a) \\ (13b) \end{cases}$$

を得る。(4.2.9)式の具体的な形は

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} P_{ka}^i - P_{ka}^{N_s-1} \\ \Phi_{ka}^i - \Phi_{ka}^{N_s-1} \end{Bmatrix} &\approx \sqrt{(x^i - x_1)^2 + (y^i - y_1)^2 + (z^i - z_1)^2} \\ &\quad - \sqrt{(x^{N_s-1} - x_1)^2 + (y^{N_s-1} - y_1)^2 + (z^{N_s-1} - z_1)^2} + \mathbf{I}_k \begin{Bmatrix} 0 \\ N_{ka}^i - N_{ka}^{N_s-1} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad \begin{cases} (14a) \\ (14b) \end{cases}$$

$$\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-2; \mathbf{a}=0,1$$

である。受信機 1 だけを用いる単独測位には, (6)式の代わりに(14)式を用いても, 受信機の時計の誤差を除去できる。

d^i と d_a が同時に存在する時には, 2 重差を取ればよい。すなわち, \mathbf{a} (または i) 間 1 重差を取ったものについて, さらに i (または \mathbf{a}) 間 1 重差を取る。具体的に書くと

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (\nabla \Delta P_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \\ (\nabla \Delta \Phi_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \end{Bmatrix} &= (\nabla \Delta \mathbf{r})_{01}^{iN_s-1} + \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{\mathbf{k}} \end{Bmatrix}^2 (\nabla \Delta \mathbf{I})_{01}^{iN_s-1} + (\nabla \Delta \mathbf{T})_{01}^{iN_s-1} + \mathbf{I}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\nabla \Delta N_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \end{Bmatrix} \\ &+ \begin{Bmatrix} (\nabla \Delta \mathbf{e}_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \\ (\nabla \Delta \mathbf{e}_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \end{Bmatrix}, \end{aligned} \quad \mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-2 \quad \begin{cases} (15a) \\ (15b) \end{cases}$$

である。ここで

$$(\nabla \Delta \bullet)_{01}^{ij} = (\Delta \bullet)_{01}^i - (\Delta \bullet)_{01}^j = (\nabla \bullet)_0^{ij} - (\nabla \bullet)_1^{ij} \quad (16)$$

とする。(15)式の右辺第 2 項以下の誤差項が無視できるとすると

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} (\nabla \Delta P_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \\ (\nabla \Delta \Phi_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \end{Bmatrix} &\approx (\nabla \Delta \mathbf{r})_{01}^{iN_s-1} + \mathbf{I}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} 0 \\ (\nabla \Delta N_{\mathbf{k}})_{01}^{iN_s-1} \end{Bmatrix}, \\ &\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-1 \end{aligned} \quad \begin{cases} (17a) \\ (17b) \end{cases}$$

を得る。(17)式の具体的な形は

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} (P_{\mathbf{k}0}^i - P_{\mathbf{k}1}^i) - (P_{\mathbf{k}0}^{N_s-1} - P_{\mathbf{k}1}^{N_s-1}) \\ (\Phi_{\mathbf{k}0}^i - \Phi_{\mathbf{k}1}^i) - (\Phi_{\mathbf{k}0}^{N_s-1} - \Phi_{\mathbf{k}1}^{N_s-1}) \end{Bmatrix} \\ &\approx \left[\sqrt{(x^i - x_0)^2 + (y^i - y_0)^2 + (z^i - z_0)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x^i - x_1)^2 + (y^i - y_1)^2 + (z^i - z_1)^2} \right] \\ &- \left[\sqrt{(x^{N_s-1} - x_0)^2 + (y^{N_s-1} - y_0)^2 + (z^{N_s-1} - z_0)^2} \right. \\ &\quad \left. - \sqrt{(x^{N_s-1} - x_1)^2 + (y^{N_s-1} - y_1)^2 + (z^{N_s-1} - z_1)^2} \right], \\ &+ \mathbf{I}_{\mathbf{k}} \begin{Bmatrix} 0 \\ (N_{\mathbf{k}0}^i - N_{\mathbf{k}1}^i) - (N_{\mathbf{k}0}^{N_s-1} - N_{\mathbf{k}1}^{N_s-1}) \end{Bmatrix} \\ &\mathbf{k}=1,2; i=0,1,\dots,N_s-2 \end{aligned} \quad \begin{cases} (18a) \\ (18b) \end{cases}$$

である。

I_a^i, T_a^i については, R_0 と R_1 の間の距離 (基線長と呼ぶ) が小さな時には, 一般に

$$I_0^i \approx I_1^i \quad (19a)$$

$$T_0^i \approx T_1^i \quad (19b)$$

が仮定されるので，受信機間の 1 重差を取れば消去される。

受信機間および衛星間の 1 重差のほかに，観測時間間の 1 重差も考えられる。時間を変えることで得られる異なる衛星位置に対して，もう一組の Φ_a^i を求める。この 2 回の計測において N_{ka}^i が変わらないとすれば，この二つの計測間の 1 重差を取ることで， N_{ka}^i を消去できる。全部の 1 重差を取ると 3 重差になり，受信機に起因する誤差，衛星に起因する誤差および不定性を消去できる。

基線長（基準点と観測点の距離）は，衛星高度に比べて大きくないことが多いので， $(\Delta \mathbf{r})_{ab}^i$ および $(\nabla \Delta \mathbf{r})_{ab}^{ij}$ を簡単にできる。基準点と観測点の相対位置ベクトルを $\Delta \mathbf{r}_{01} = (\Delta x_{01}, \Delta y_{01}, \Delta z_{01})$ とすると

$$(x_1, y_1, z_1) = (x_0 + \Delta x_{01}, y_0 + \Delta y_{01}, z_0 + \Delta z_{01}) \quad (20)$$

であるので

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1^i &= \sqrt{(x_0 - x^i + \Delta x_{01})^2 + (y_0 - y^i + \Delta y_{01})^2 + (z_0 - z^i + \Delta z_{01})^2} \\ &\approx \sqrt{(x_0 - x^i)^2 + (y_0 - y^i)^2 + (z_0 - z^i)^2} \\ &\quad + 2(x_0 - x^i)\Delta x_{01} + 2(y_0 - y^i)\Delta y_{01} + 2(z_0 - z^i)\Delta z_{01} \\ &\approx \mathbf{r}_0^i + \frac{(x_0 - x^i)}{\mathbf{r}_0^i} \Delta x_{01} + \frac{(y_0 - y^i)}{\mathbf{r}_0^i} \Delta y_{01} + \frac{(z_0 - z^i)}{\mathbf{r}_0^i} \Delta z_{01} \\ &= \mathbf{r}_0^i - e_{0,x}^i \Delta x_{01} - e_{0,y}^i \Delta y_{01} - e_{0,z}^i \Delta z_{01} \end{aligned} \quad (21)$$

となる。ここで $\mathbf{e}_0^i = (e_{0,x}^i, e_{0,y}^i, e_{0,z}^i)$ は基準点受信機 0 から衛星 i に向かう単位ベクトルで，図 2.2 に示されるように，受信機 0 から見た衛星 i の高度 $\mathbf{q}_{0,elv}^i$ および方位角 $\mathbf{q}_{0,azm}^i$ から

$$(e_{0,x}^i, e_{0,y}^i, e_{0,z}^i) = (\cos \mathbf{q}_{0,elv}^i \cos \mathbf{q}_{0,azm}^i, \cos \mathbf{q}_{0,elv}^i \sin \mathbf{q}_{0,azm}^i, \sin \mathbf{q}_{0,elv}^i) \quad (22)$$

と求まる。

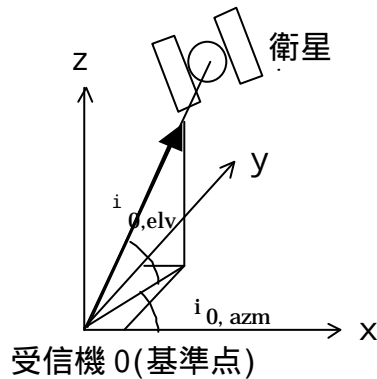


図 2.2 高度と方位角の定義

衛星の高度が 20000km と極めて大きいので，通常は高度 $\mathbf{q}_{0,elv}^i$ ，方位角 $\mathbf{q}_{0,azm}^i$ は，擬似距離を用いても極めて正確に求まる。

(21)式より

$$\begin{aligned}
(\Delta \mathbf{r})_{01}^i &= \mathbf{r}_0^i - \mathbf{r}_1^j \\
&\approx e_{0,x}^i \Delta x_{01} + e_{0,y}^i \Delta y_{01} + e_{0,z}^i \Delta z_{01} = \mathbf{e}_0^i \cdot \Delta \mathbf{r}_{01}
\end{aligned} \tag{23}$$

と書ける。基線長が小さい場合には，(9)式の右辺第1項を(23)式で近似する。
さらに，(23)式の衛星間1重差を取ると

$$\begin{aligned}
(\nabla \Delta \mathbf{r})_{01}^{ij} &= (\Delta \mathbf{r})_{01}^i - (\Delta \mathbf{r})_{01}^j = \mathbf{r}_0^i - \mathbf{r}_1^j - \mathbf{r}_0^j + \mathbf{r}_1^i \\
&\approx (e_{0,x}^i - e_{0,x}^j) \Delta x_{01} + (e_{0,y}^i - e_{0,y}^j) \Delta y_{01} + (e_{0,z}^i - e_{0,z}^j) \Delta z_{01} \\
&= (\mathbf{e}_0^i - \mathbf{e}_0^j) \cdot \Delta \mathbf{r}_{01}
\end{aligned} \tag{24}$$

を得る。基線長が小さい場合には，(17)式の右辺第1項を(24)式で近似する。すなわち

$$\left\{ \begin{array}{l} (\nabla \Delta P_k)_{01}^{i N_s - 1} \\ (\nabla \Delta \Phi_k)_{01}^{i N_s - 1} \end{array} \right\} \approx (\mathbf{e}_0^i - \mathbf{e}_0^j) \cdot \Delta \mathbf{r}_{01} + \mathbf{I}_k \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ (\nabla \Delta N_k)_{01}^{i N_s - 1} \end{array} \right\}, \tag{25a}$$

$$\mathbf{k} = 1, 2; \quad i = 0, 1, \dots, N_s - 2 \tag{25b}$$

と書ける。

受信機0,1間の相対座標ベクトル $\Delta \mathbf{r}_{01}$ を求めるのには，当然のことながら受信機0の絶対座標は不要である。受信機0から衛星を見る高度や方位角の値は必要であるから，厳密な値は不要であるというのが正確な言い方である。

3．線形結合

(1)式で与えられる信号の1次結合を作ると，有用な仮想的信号が得られる。(1b)式の両辺に $1/\mathbf{I}_k$ を掛けると

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathbf{I}_k} \Phi_{k_a}^i(t) &= \frac{1}{\mathbf{I}_k} \mathbf{r}_a^j(t) - \frac{1}{\mathbf{I}_k} \left(\frac{f_1}{f_k} \right)^2 I_a^i(t) + \frac{1}{\mathbf{I}_k} T_a^i(t) + N_{k_a}^i \\
&\quad + \frac{1}{\mathbf{I}_k} c \mathbf{d}_a(t) - \frac{1}{\mathbf{I}_k} c \mathbf{d}^i(t) + \frac{1}{\mathbf{I}_k} \mathbf{e}_{k_a}^i(t), \\
\mathbf{k} &= 1, 2; \quad i = 0, 1, \dots, N_s - 1; \quad \mathbf{a} = 0, 1
\end{aligned} \tag{26}$$

となる。 $\mathbf{k} = 1, 2$ とする2式を加減(±)して得られた式の両辺に， c を掛けた上で書き直すと

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{N_a}^i(t) \\ \Phi_{W_a}^i(t) \end{array} \right\} = \mathbf{r}_a^j(t) \mp \frac{f_1}{f_2} I_a^i(t) + T_a^i(t) + \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{I}_N N_{N_a}^i \\ \mathbf{I}_W N_{W_a}^i \end{array} \right\}$$

$$+c\mathbf{d}_a(t)-c\mathbf{d}^i(t)+\frac{f_1\mathbf{e}_{1a}^i(t)\pm f_2\mathbf{e}_{2a}^i(t)}{f_1\pm f_2},$$

$$i=0,1,\dots,N_S-1; \mathbf{a}=0,1 \quad (27)$$

という 2 種類の式を得る。ここで

$$\left. \begin{array}{l} \Phi_{N_a}^i(t) \\ \Phi_{W_a}^i(t) \end{array} \right\} = \frac{f_1\Phi_{1a}^i(t)\pm f_2\Phi_{2a}^i(t)}{f_1\pm f_2} \quad (28a)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_W \end{array} \right\} = \frac{c}{f_1\pm f_2} \quad (28b)$$

$$\left. \begin{array}{l} N_{N_a}^i \\ N_{W_a}^i \end{array} \right\} = N_{1a}^i \pm N_{2a}^i \quad (28c)$$

である。 $\Phi_{N_a}^i(t)$ および $\Phi_{W_a}^i(t)$ は、それぞれナロ - レ - ン (Narrow-lane) 結合およびワイドレ - ン (Wide-lane) 結合と呼ばれる。 \mathbf{I}_N および \mathbf{I}_W は仮想的信号の波長である。 $f_1=154\times 10.23\text{MHz}\approx 1.58\text{GHz}$, $f_2=120\times 10.23\text{MHz}\approx 1.23\text{GHz}$ を代入すると, $\mathbf{I}_N\approx 0.107\text{m}$, $\mathbf{I}_W\approx 0.857\text{m}$ である。 \mathbf{I}_W は $\mathbf{I}_1\approx 0.190\text{m}$, $\mathbf{I}_2\approx 0.244\text{m}$ よりも大きいので, 整数不定性 $N_{W_a}^i$ の決定は, 他の不定性 N_{1a}^i , N_{2a}^i , $N_{N_a}^i$ の決定よりもかなり容易である。すなわち, 誤差の影響を受けにくくなる。

ナロ - レ - ン結合とワイドレ - ン結合を足し合わせると

$$\Phi_{I_a}^i(t)=\mathbf{r}_a^i(t)+T_a^i(t)+\frac{1}{2}(\mathbf{I}_N N_{N_a}^i+\mathbf{I}_W N_{W_a}^i)$$

$$+c\mathbf{d}_a(t)-c\mathbf{d}^i(t)+\frac{f_1^2\mathbf{e}_{1a}^i(t)}{f_1^2-f_2^2}-\frac{f_2^2\mathbf{e}_{2a}^i(t)}{f_1^2-f_2^2},$$

$$i=0,1,\dots,N_S-1; \mathbf{a}=0,1 \quad (29)$$

を得る。ここで

$$\Phi_{I_a}^i(t)=\frac{1}{2}[\Phi_{N_a}^i(t)+\Phi_{W_a}^i(t)]$$

$$=\frac{f_1^2}{f_1^2+f_2^2}\Phi_{1a}^i(t)-\frac{f_2^2}{f_1^2+f_2^2}\Phi_{2a}^i(t) \quad (30)$$

である。この仮想的結合 $\Phi_{I_a}^i(t)$ は電離層遅延を含まないので, 電離層フリ - (Ionosphere Free) 結合と呼ばれる。電離層フリ - 結合の場合には, (29)式右辺第 3 項の不定性の項の形をみれば分かるように, 仮想的な波長を定義できない。この項は

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\mathbf{I}_N N_{Na}^i + \mathbf{I}_W N_{Wa}^i) &= \frac{c}{f_1 + f_2} \left(N_1 - \frac{N_W}{2} \right) + \frac{c}{f_1 - f_2} \frac{N_W}{2} \\
&= \mathbf{I}_N N_1 - \frac{1}{2}(\mathbf{I}_N - \mathbf{I}_W) N_W \\
i &= 0, 1, \dots, N_S - 1; \mathbf{a} = 0, 1
\end{aligned} \tag{31}$$

と変形できる。通常，(29)式の観測方程式は N_W が既知として用いられるが，(31)式より整数不定性 N_1 に掛かる波長はナロ - レ - ン結合の波長 $\mathbf{I}_N \approx 0.107m$ と小さいので，誤差を極力小さくする必要がある。擬似距離に関する同様の線形結合が，(1a)式から求められる。

(1b)式において， $\mathbf{k}=1, 2$ とする2式の引き算をすると

$$\begin{aligned}
\Phi_{Ga}^i(t) = \Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{2a}^i(t) &= - \left[1 - \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 \right] I_a^i(t) + \mathbf{I}_1 N_{1a}^i - \mathbf{I}_2 N_{2a}^i \\
&\quad + \mathbf{e}_{1a}^i(t) - \mathbf{e}_{2a}^i(t), \\
i &= 0, 1, \dots, N_S - 1; \mathbf{a} = 0, 1
\end{aligned} \tag{32}$$

を得る。ここで

$$\Phi_{Ga}^i(t) = \Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{2a}^i(t) \tag{33}$$

とする。線形結合不定性 $\Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{2a}^i(t)$ はレンジ $\mathbf{r}_a^i(t)$ を含んでいないので，ジオメトリフリ - (Geometry Free) 結合と呼ばれる。 N_{1a}^i, N_{2a}^i が既知とすると，この式から L_1 波の電離層遅延 I_a^i を推定することができる。擬似距離に関する同様の線形結合が，(1a)式から求められる。

つぎに，擬似距離と位相距離の両方を用いる1次結合を考える。(1)式において， $\mathbf{k}=1, 2$ としたものを行列を用いて書くと

$$\begin{aligned}
\begin{Bmatrix} P_{1a}^{*i}(t) \\ P_{2a}^{*i}(t) \\ \Phi_{1a}^{*i}(t) \\ \Phi_{2a}^{*i}(t) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & (f_1/f_2)^2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & \mathbf{I}_1 & 0 \\ 1 & -(f_1/f_2)^2 & 0 & \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) \\ I_a^i(t) \\ N_{1a}^i \\ N_{2a}^i \end{Bmatrix} \\
i &= 0, 1, \dots, N_S - 1; \mathbf{a} = 0, 1
\end{aligned} \tag{34}$$

を得る。この式は0重差の式であるが，1重差および2重差に関しても同様の式が得られる。

ここで

$$\begin{bmatrix} P_{1a}^{*i}(t) \\ P_{2a}^{*i}(t) \\ \Phi_{1a}^{*i}(t) \\ \Phi_{2a}^{*i}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{1a}^i(t) \\ P_{2a}^i(t) \\ \Phi_{1a}^i(t) \\ \Phi_{2a}^i(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c\mathbf{d}_a(t) - c\mathbf{d}^i(t) + cb_{1a}(t) + cb_1^i(t) \\ c\mathbf{d}_a(t) - c\mathbf{d}^i(t) + cb_{2a}(t) + cb_2^i(t) \\ c\mathbf{d}_a(t) - c\mathbf{d}^i(t) \\ c\mathbf{d}_a(t) - c\mathbf{d}^i(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} e_{1a}^i(t) \\ e_{2a}^i(t) \\ \mathbf{e}_{1a}^i(t) \\ \mathbf{e}_{2a}^i(t) \end{bmatrix} \quad (35)$$

とする。この式の右辺の第 2 項は 2 重差を取ると消えてしまう。(34) 式を $\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t)$, $I_a^i(t)$, N_{1a}^i , N_{2a}^i を未知数とする連立 1 次方程式と考えると, これらの未知数が観測量 $P_{1a}^i(t)$, $P_{2a}^i(t)$, $\Phi_{1a}^i(t)$, $\Phi_{2a}^i(t)$ の 1 次結合で表される。すなわち

$$\begin{bmatrix} \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) \\ I_a^i(t) \\ N_{1a}^i \\ N_{2a}^i \end{bmatrix} = \frac{1}{1 - (f_1/f_2)^2} \begin{bmatrix} -(f_1/f_2)^2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ [1 + (f_1/f_2)^2]/\mathbf{I}_1 & -2/\mathbf{I}_1 & [1 - (f_1/f_2)^2]/\mathbf{I}_1 & 0 \\ 2(f_1/f_2)^2/\mathbf{I}_2 & -[1 + (f_1/f_2)^2]/\mathbf{I}_2 & 0 & [1 - (f_1/f_2)^2]/\mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{1a}^{*i}(t) \\ P_{2a}^{*i}(t) \\ \Phi_{1a}^{*i}(t) \\ \Phi_{2a}^{*i}(t) \end{bmatrix} \quad (36)$$

である。

(28c) 式と(36)式より, いわゆるナロ - レ - ン結合およびワイドレ - ン結合の初期位相不定性 N_{Na}^{*i} および N_{Wa}^{*i} を求めると

$$N_{Na}^i = N_{1a}^i + N_{2a}^i = \frac{\Phi_{1a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{\Phi_{2a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_2} - \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \left(\frac{P_{1a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{P_{2a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_2} \right) \quad (37a)$$

$$N_{Wa}^i = N_{1a}^i - N_{2a}^i = \frac{\Phi_{1a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_1} - \frac{\Phi_{2a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_2} - \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \left(\frac{P_{1a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{P_{2a}^{*i}(t)}{\mathbf{I}_2} \right) \quad (37b)$$

となる。 $f_1 \approx 1.58\text{GHz}$, $f_2 \approx 1.23\text{GHz}$ を代入すると, $(f_1 - f_2)/(f_1 + f_2) \approx 0.124$ であるので, (37) 式を数値計算に用いると, N_{Wa}^i については, 擬似距離を介して入り込む誤差が約 1/10 になるので精度が高い。一方, $(f_1 + f_2)/(f_1 - f_2) \approx 8.06$ となって, N_{Na}^i については, 擬似距離を介して入り込む誤差が約 10 倍になるので精度が悪い。(37b) 式は, Melbourne-Wübbena Linear Combination とほぼ同じものである (Melbourne (1985), Wübbena (1985))。この線形結合を用いると, 電離層遅延や対流圏遅延の影響を受けないことが分かる。すなわち, 基線長の影響を受けないで, Wide-lane の初期位相不定性を高精度に決定できる可能性を有する。

参考文献

- [1] 土屋 淳 , 辻 宏道 , (1995), 「GPS 測定の基礎」, (社)日本測量協会.
- [2] Diggelen, F. and Abraham, C., (2001), Indoor GPS: The no chip challenge, GPS World, Sept.
- [3] Goad, C. C., (1998), “Single-Site GPS Models”, GPS for Geodesy edited by P. J. G. Teunissen and A. Kleusberg, 2nd edition, Springer, pp. 437-456.
- [4] Hugelobler, H., Schaer, S. and Fridez, P., (2001), Bernese GPS Software Version 4.2, Astronomical Institute, University of Berne.
- [5] Isshiki, H., (2002), An Application of Wide-Lane to Long Baseline GPS Measurements (2), ION GPS 2002, The Institute of Navigation.
- [6] Melbourne, W. G., (1985), The Case for Ranging in GPS Based Geodetic Systems, Proceedings 1st International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, edited by Clyde Goad, pp. 403-412, U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland.
- [7] Misra, P., Enge, P., (2001), Global Positioning System, Ganga-Jamuna Press.
- [8] Wübbena, G., (1985), Software Developments for Geodetic Positioning with GPS Using TI 4100 Code and Carrier Measurements, Proceedings 1st International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, edited by Clyde Goad, pp. 403-412, U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland.