

不定性の決定

初期位相不定性が決定されると、受信機の座標計算は、コード測位の場合とまったく同じであり、これ自体は難しいことではない。問題は不定性の決定である。短基線の場合には、2重差で観測誤差を十分に除去できるので大きな問題はない。長基線の場合には、衛星軌道誤差、電離層遅延、対流圏遅延の影響、特に電離層遅延の影響をいかにして取り除くかが大きな問題であり、特にキネマチック測位に対しては十分な解決が得られていない。短基線の場合を主として述べるが、長基線の場合についても簡単に触れる。

1. 初期位相不定性決定の簡単な例

まず、位相計測を行う場合に起きる初期位相不定性の最も単純な例に付いて述べる (Misra and Enge (2001) / Hwang (1991))。図 1.1 に示されるように、A、B の 2 箇所に受信機を置いて、一つの衛星からの搬送波の位相を計測して、基線長 (A、B 間の距離) を求める問題を考えてみる。簡単のために 2 次元的に考え、衛星の高度は既知とする。

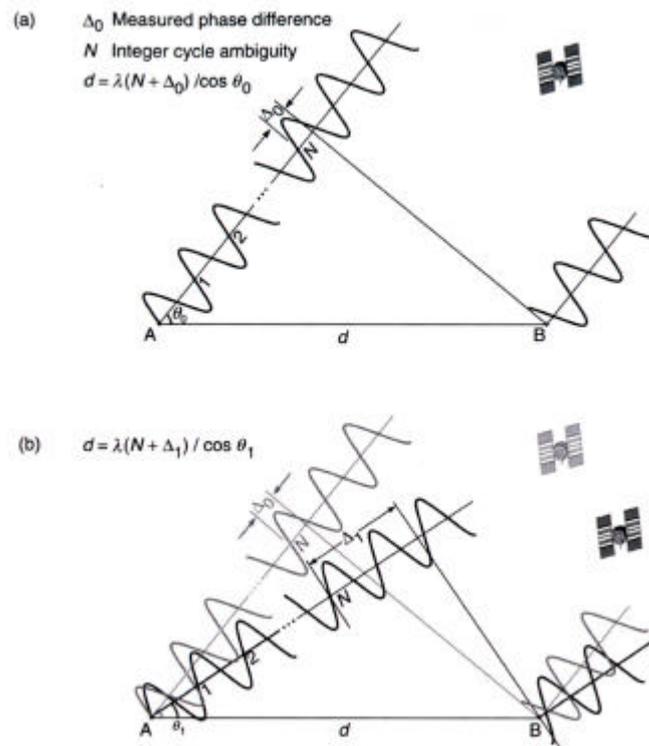


図 1.1 単純な 1 次元の場合の整数不定性の決定。(a) 1 回目の計測, (b) 2 回目の計測 (Misra and Enge (2001) / Hwang (1991))

時刻 t_0 に、たまたま図 1.1(a) のような関係にあったものとして、受信機 A、B の位置における位相を $f_A(t_0)$ 、 $f_B(t_0)$ とし、その差を $f_{AB}(t_0)$ とする。観測量として得られるのは、受信機 A の観測量と受信機 B の観測量の差 Δ_0 で、 $f_{AB}(t_0)$ と Δ_0 は等しくない。両者には整数波数の差がある。いわゆる初期位相不定性 N である。すなわち

$$\mathbf{f}_{AB}(t_0) = \mathbf{f}_A(t_0) - \mathbf{f}_B(t_0) = \Delta_0 + N \quad (1.1)$$

である。このときの衛星高度を \mathbf{q}_0 とすると

$$d \cos \mathbf{q}_0 = \mathbf{l}(\Delta_0 + N) \quad (1.2)$$

という関係が求まる。図 1.1(b)に示されるように、衛星が十分に移動した後でもう一度計測すると

$$d \cos \mathbf{q}_1 = \mathbf{l}(\Delta_1 + N) \quad (1.3)$$

を得る。(1.2)式と(1.3)式から、基線長 d と不定性 N が

$$\frac{d}{\mathbf{l}} = \frac{\Delta_0 - \Delta_1}{\cos \mathbf{q}_0 - \cos \mathbf{q}_1} \quad (1.4)$$

$$N = \frac{\Delta_0 \cos \mathbf{q}_1 - \Delta_1 \cos \mathbf{q}_0}{\cos \mathbf{q}_0 - \cos \mathbf{q}_1} \quad (1.5)$$

と求まる。

上述の方法は衛星の移動を利用する方法であるが、受信機 A と B のアンテナの位置をすばやく入れ替える、いわゆるアンテナ・スワッピングという方法がある。アンテナ・スワッピングを行うと、受信機 A の位相 $\mathbf{f}_A(t_0)$ は $d \cos \mathbf{q}_0 / \mathbf{l}$ だけ減少し、受信機 B の位相 $\mathbf{f}_B(t_0)$ は $d \cos \mathbf{q}_0 / \mathbf{l}$ だけ増加するので、 Δ_0 をスワッピング前の位相差、 Δ_0' をスワッピング後の位相差とすると

$$\Delta_0' - \Delta_0 = -\frac{2d \cos \mathbf{q}_0}{\mathbf{l}} \quad (1.6)$$

であるから、基線長 d はこれより

$$\frac{d}{\mathbf{l}} = -\frac{(\Delta_0' - \Delta_0)}{2 \cos \mathbf{q}_0} \quad (1.7)$$

と求まる。一方、(1.2)式から、不定性 N が

$$N = \frac{d}{\mathbf{l}} \cos \mathbf{q}_0 - \Delta_0 = -\frac{\Delta_0' + \Delta_0}{2} \quad (1.8)$$

と求まる。

2. 非探索法 (2 周波数の場合)

最も簡単な初期位相不定性決定法について考える。 \mathbf{f} を位相、 P を擬似距離、 \mathbf{r} を衛星と受信機間の真の距離、 \mathbf{l} を搬送波の波長、 N を不定性、 \mathbf{e} を位相観測のノイズ、 e を擬似距離観測のノイズとすると、 $L1$ の位相と擬似距離の観測方程式は

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{l}_1} + N_1 + \mathbf{e}_1 \quad (2.1a)$$

$$P_1 = \mathbf{r} + e_1 \quad (2.1b)$$

と書ける。これより，不定性 N_1 の推定値 \hat{N}_1 が

$$\hat{N}_1 = \left[\mathbf{f}_1 - \frac{P_1}{\mathbf{I}_1} \right]_{\text{round off}} \quad (2.2)$$

と求まる。 $\mathbf{s}(P_1) \approx 1m$ であるので

$$\mathbf{s}(\hat{N}_1) \approx \frac{1}{0.19} = 5.3 \quad (2.3)$$

である。 $\hat{N}_1 - N_1$ の計算例を図 2.1 に示す。かなりのばらつきがある。

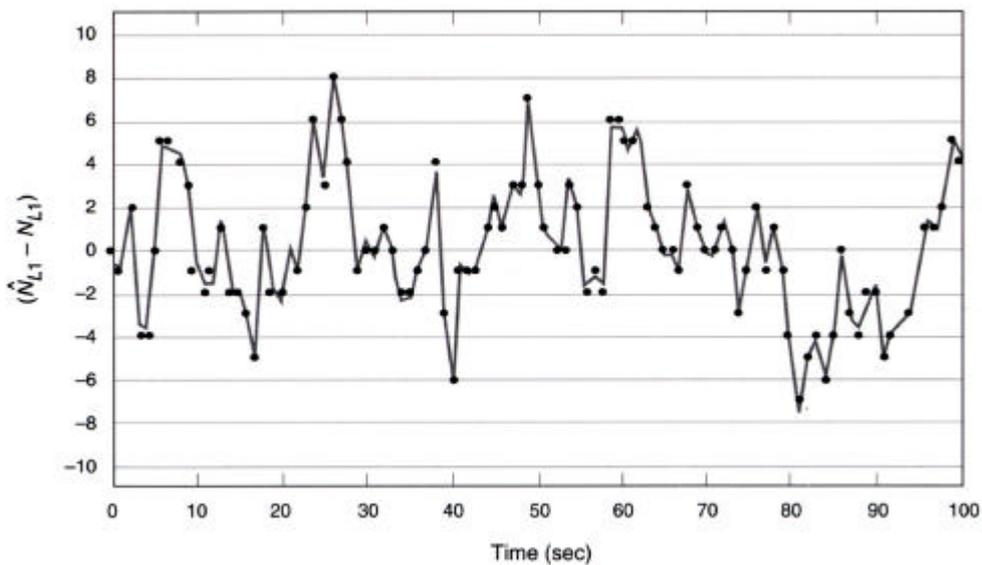


図 2.1 基線長 150m の場合における L1 の 2 重差の不定性 (Misra and Enge (2001) / Dr. Jaewoo June, Trimble Navigation 提供)

2 周波受信機で観測している場合には，かなりましな推定値が求まることを以下に示す。
2 周波観測方程式は

$$P_1 = \mathbf{r} + \mathbf{e}_1 \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}_1} + N_1 + \mathbf{e}_1 \quad (2.4b)$$

$$P_2 = \mathbf{r} + \mathbf{e}_2 \quad (2.4c)$$

$$\mathbf{f}_2 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}_2} + N_2 + \mathbf{e}_2 \quad (2.4d)$$

で与えられる。

2 周波の位相観測方程式の線形結合より，いわゆるワイドレ - ン結合：

$$\mathbf{f}_{12} = \mathbf{f}_1 - \mathbf{f}_2$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{r} \left(\frac{1}{\mathbf{I}_1} - \frac{1}{\mathbf{I}_2} \right) + (N_1 - N_2) + \mathbf{e}_{12} \\
&= \mathbf{r} \left(\frac{f_1 - f_2}{c} \right) + (N_1 - N_2) + \mathbf{e}_{12} \\
&= \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}_{12}} + (N_1 - N_2) + \mathbf{e}_{12}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

を作る。ここで、ワイドレ - ンの波長 \mathbf{I}_{12} は

$$\mathbf{I}_{12} = \frac{c}{f_1 - f_2} \tag{2.6}$$

である。(2.5)式より、ワイドレ - ンの不定性 $N_{12} = N_1 - N_2$ の推定値 \hat{N}_{12} が

$$\hat{N}_{12} = \left[\mathbf{f}_{12} - \frac{P_1}{\mathbf{I}_{12}} \right]_{\text{round off}} \tag{2.7}$$

と求まる。 $\mathbf{s}(P) \approx 1m$ を考慮すると

$$\mathbf{s}(\hat{N}_{12}) \approx \frac{1}{0.86} = 1.2 \tag{2.8}$$

となるので、 \hat{N}_{12} のばらつきは \hat{N}_1 に比べてかなり小さい。計算例を図 2.2 に示す。時間平均によりノイズを除去すると、正確な不定性の推定が可能であることが分かる。

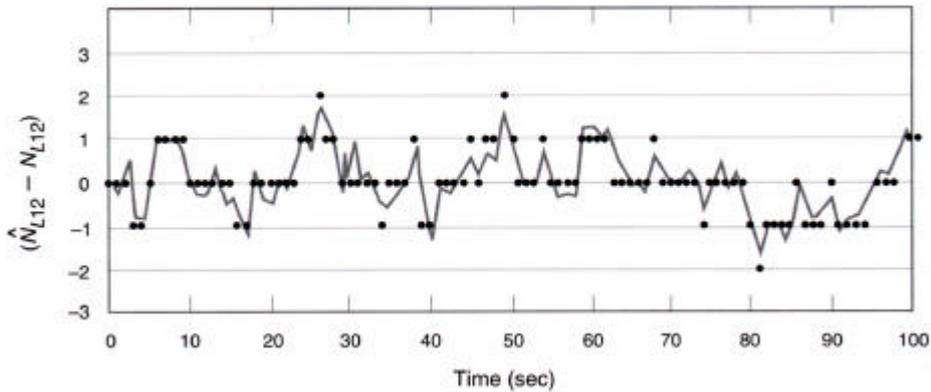


図2.2 基線長 150m の場合におけるワイドレ - ン L12 の2 重差の不定性(Misra and Enge (2001) /Dr. Jaewoo June, Trimble Navigation 提供)

それならば、ワイドレ - ンで受信機の座標まで決定したらどうかということになるが、実はそれほど単純でない。それは、ワイドレ - ンはノイズが大きいからである。このことを以下に示す。 $\Phi_1 = \mathbf{I}_1 \mathbf{f}_1$, $\Phi_2 = \mathbf{I}_2 \mathbf{f}_2$, $\Phi_{12} = \mathbf{I}_{12} \mathbf{f}_{12}$ として

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} &= \frac{\mathbf{I}_{12}}{\mathbf{I}_1} \Phi_1 - \frac{\mathbf{I}_{12}}{\mathbf{I}_2} \Phi_2 \\
&= \frac{f_1}{f_1 - f_2} \Phi_1 - \frac{f_2}{f_1 - f_2} \Phi_2 \\
&= \frac{154}{34} \Phi_1 - \frac{120}{34} \Phi_2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

とかけるので， $\mathbf{s}(\mathbf{e}_{\Phi_1}) \approx 0.01m$ とすると

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}(\mathbf{e}_{\Phi_{12}}) &= \sqrt{\left(\frac{154}{34}\right)^2 + \left(\frac{120}{34}\right)^2} \mathbf{s}(\mathbf{e}_{\Phi_1}) \\
&= 5.7 \mathbf{s}(\mathbf{e}_{\Phi_1}) = 0.057m
\end{aligned} \tag{2.10}$$

となり，ワイドレ - ン L_{12} の誤差は L_1 よりも一桁近く大きくなる事が分かる。

一方， \hat{N}_{12} から \hat{N}_1 の推定は以下のように行う。すなわち， L_1 と L_{12} の観測方程式：

$$\mathbf{f}_1 = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}_1} + N_1 + \mathbf{e}_1 \tag{2.4b}$$

$$\mathbf{f}_{12} = \frac{\mathbf{r}}{\mathbf{I}_{12}} + N_{12} + \mathbf{e}_{12} \tag{2.5}$$

より \mathbf{r} を消去すると

$$\hat{N}_1 = \left[\frac{\mathbf{I}_{12}}{\mathbf{I}_1} \hat{N}_{12} - \frac{\mathbf{I}_{12}}{\mathbf{I}_1} \mathbf{f}_{12} + \mathbf{f}_1 \right]_{\text{round off}} \tag{2.11}$$

を得る。2重差に関してこの式を適用したものは，基線距離 10km 以内であれば \hat{N}_1 の2重差を正しく求められる。

3 . 短基線長の場合の初期位相不定性決定

3.1 AFM (Ambiguity Function Method)

高精度 GPS 位相測位に先鞭を付けた C. Counselman が提唱した方法 (Counselman and Gourevitch (1981)) である。サイクルスリップの影響を受けないという特長がある。衛星 i の座標と受信機 \mathbf{a} の座標推定値より計算されるレンジ \mathbf{r}_a^i と位相距離 Φ_a^i の差は整数波数 ($2\mathbf{p}$ ラジアン の整数倍) であるので， $\cos(2\mathbf{p}(\mathbf{r}_a^i - \Phi_a^i)/\mathbf{I}) = 1$ でなければならない。したがって

$$\sum_i \sum_a w_a^i \cos(2\mathbf{p}(\mathbf{r}_a^i - \Phi_a^i)/\mathbf{I}) = \max \tag{3.1}$$

という不定性決定のアルゴリズムを導ける。ここで， w_a^i は重みである。

3.2 探索法の基礎方程式，整数最小二乗法，探索空間の自由度

衛星の個数を N_s , 基準点を 0 , 観測点を 1 , 位相距離の観測量を Φ , 真のレンジ (受信機と衛星間の距離) を \mathbf{r} , 初期位相不定性を N , 観測ノイズを \mathbf{e} とする場合の 2 重差観測方程式は

$$(\nabla\Delta\Phi)_{0,1}^{i,N_s-1} = (\nabla\Delta\mathbf{r})_{0,1}^{i,N_s-1} + \mathbf{I}(\nabla\Delta N)_{0,1}^{i,N_s-1} + \mathbf{e}_{0,1}^{i,N_s-1}, \quad i=0,1,\dots,N_s-1 \quad (3.2)$$

で与えられる。短基線を前提として, 伝播路の誤差は無視されている。

衛星高度は 20,000 km と極めて大きいので, (3.2) 式の右辺第 1 項を近似すると

$$\begin{aligned} (\nabla\Delta\Phi)_{0,1}^{i,N_s-1} &= (e_{0,x}^i - e_{0,x}^{N_s-1})(x_1 - x_0) + (e_{0,y}^i - e_{0,y}^{N_s-1})(y_1 - y_0) + (e_{0,z}^i - e_{0,z}^{N_s-1})(z_1 - z_0) \\ &\quad + \mathbf{I}(\nabla\Delta N)_{0,1}^{i,N_s-1} + \mathbf{e}_{0,1}^{i,N_s-1}, \quad i=0,1,\dots,N_s-1 \end{aligned} \quad (3.3)$$

となる。 $(e_{a,x}^i, e_{a,y}^i, e_{a,z}^i)$ は受信機 \mathbf{a} から衛星 i に向かう単位ベクトル, (x_a, y_a, z_a) は受信機 \mathbf{a} の座標である。ここで

$$y^i = \mathbf{I}^{-1}(\nabla\Delta\Phi)_{0,1}^{i,N_s-1} \quad (3.4a)$$

$$[g]^i = \mathbf{I}^{-1} \begin{bmatrix} e_{0,x}^i - e_{0,x}^{N_s-1} & e_{0,y}^i - e_{0,y}^{N_s-1} & e_{0,z}^i - e_{0,z}^{N_s-1} \end{bmatrix} \quad (3.4b)$$

$$\{x\} = [x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0]^T \quad (3.4c)$$

$$N^i = (\nabla\Delta N)_{0,1}^{i,N_s-1} \quad (3.4d)$$

$$\mathbf{e}^i = \mathbf{I}^{-1} \mathbf{e}_{0,1}^{i,N_s-1} \quad (3.4e)$$

とすると

$$y^i = [g]^i \{x\} + N^i + \mathbf{e}^i, \quad i=0,1,\dots,N_s-1 \quad (3.5)$$

と書ける。この式をひとまとめにすると

$$\{y\} = [g] \{x\} + \{N\} + \{\mathbf{e}\} \quad (3.6)$$

を得る。この方程式の数は $N_s - 1$ 個, 未知数は座標が 3 個, 不定性が $N_s - 1$ 個であるので, $N_s + 2$ 個であり, 未知数の数が方程式の数を上回っており, 無限に解が存在することになってしまうので, 解を確定できない。(3.6) 式を複数エポックで考えるときには, 不定性はすべてのエポックで共通であるから, 未知数よりも方程式の数が増えるようにできる。例えば, 5 衛星を 4 エポックにわたって考えると, 方程式の数は $4(N_s - 1) = 16$ であるのに対して, 未知数の数は $4 \times 3 + (N_s - 1) = 16$ となる。したがって, 5 衛星のときには, 4 エポック以上で考えれば, 方程式の数は未知数の数以上になる。

(3.6) 式で与えられる観測方程式を最小二乗法で解くために, コスト関数:

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}, \mathbf{N}) &= \|\{y\} - [g] \{x\} - \{N\}\|^2 \\ &= (\{y\} - [g] \{x\} - \{N\})^T (\{y\} - [g] \{x\} - \{N\}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

を導入する。この例では, 重みを単位にとっているが, 一般的には重み行列を導入して, 重み付き最小二乗法とする。通常の最小二乗法と異なるのは, 受信機座標 $\mathbf{x} = \{x\}$ は実数値

であるが、不定性 $\mathbf{N} = \{N\}$ を整数値で求めねばならないことである。

Hatch (1990) に指摘されたように、エポック数に関係なく 2 重差方程式(3.6)式の自由度は 3 である。なぜならば、受信機座標 $\mathbf{x} = \{x\}$ を決めるとすべての不定性 $\mathbf{N} = \{N\}$ は決まってしまう。また、不定性 3 個を決めると、座標が決まってしまうので、残りの不定性も決まってしまう。Hatch による以下の探索法は、必ずしも実際にうまくいく推定法であるかどうか確認していないが、非常に示唆に富む。

- ・ 衛星を二組に分ける：4 衛星からなる主グループと残りの $K-4$ 衛星から成る副グループである。
- ・ 観測点座標の初期値を推定する。主グループの整数不定性の候補を作り、対応する座標を推定する。
- ・ この座標を用いて副グループの不定性を推定する。座標が正しければ、副グループの不定性は整数に近い。

3.3 フロ - ト解と整数解 , LAMDA (Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment) 法

より一般的に、重み $\mathbf{W} = [W]$ 付きのコスト関数

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}, \mathbf{N}) &= \left\| \{y\} - [g]\{x\} - \{N\} \right\|_{\mathbf{W}}^2 \\ &= (\{y\} - [g]\{x\} - \{N\})^T [W] (\{y\} - [g]\{x\} - \{N\}) \end{aligned} \quad (3.8)$$

を考える。不定性 $\mathbf{N} = \{N\}$ は整数であるが、この問題の最も単純な解法は、受信機座標 $\mathbf{x} = \{x\}$ も不定性 $\mathbf{N} = \{N\}$ も実数とするフロ - ト解を求め、これが真の解の十分な近似値になっていると考えることである。すなわち、不定性 $\mathbf{N} = \{N\}$ を整数に丸めると、正しい解が得られると考えることである。

しかし、このような方法は必ずしも常に正しくない。この問題を解決するのが LAMDA (Least-square Ambiguity Decorrelation Adjustment) 法である。図 3.1(a)には、フロ - ト解の単純な丸めが誤った解を導く例が示されている。この原因は、不定性の中に強い相関があるため等コスト楕円体が直線に近くなるためである。そこで、線形変換を施して、長楕円体を球に近いようにすることを考える。図 3.1(b)に示されるように、変換された探索空間では、単純な丸めが正解を導くことが分かる。ただし、この線形変換は、整数を整数に導くものでなければならないので、単純ではない。

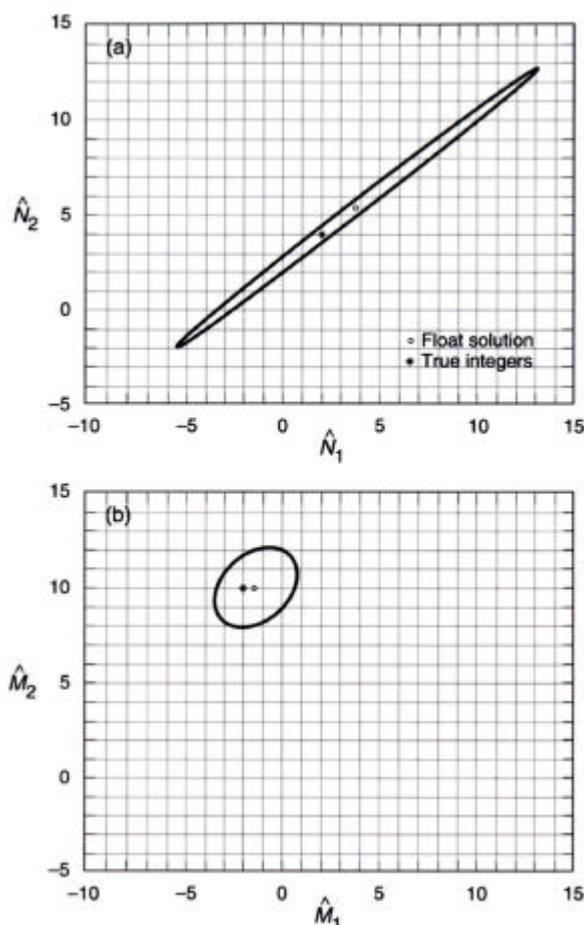


図 3.1 LAMBDA 法の説明図。(a) フロート解の単純な丸めは誤った解を導く。(b) 変換された探索空間では、単純な丸めが正解を導く。(Misra and Enge (2001) / Joosten and Tiberius (2000))

4. 非探索法 (3周波数の場合)

GPS Modernization では、表 4.1 に示されるように、新しく L5 ($f=1176.45\text{MHz}$, $\lambda=0.255\text{m}$) が加わる予定である。そうすると現存の Wide-lane L2 ($\lambda=0.862\text{m}$) のほかに extra Wide-lane L25 ($\lambda=5.861\text{m}$) ができる。これをうまく使うと、簡単な不定性決定法の可能性が生まれる。その方法は、概略、以下のステップで計算を行う。

表 4.1 GPS モダニゼーション後に使用できる信号

搬送波信号	周波数(MHz)	波長(m)
L1	1575.42=154x10.23	0.190
L2	1227.60=120x10.23	0.244
L5	1176.45=115x10.23	0.255
L1-L5	398.97	0.751 (medium range)
L1-L2	347.82	0.862 (wide range)
L2-L5	51.75	5.861 (extra wide range)

ステップ 1 : L5 の C/A コードの擬似距離をレンジ（衛星受信機間距離）の近似値 $\hat{\mathbf{r}}(0)$ とする。

$$\hat{\mathbf{r}}(0) = P_5 \quad (4.1)$$

ステップ 2 : 上のレンジとエキストラ・ワイドレ - ン L25 の位相観測方程式から , エキストラ・ワイドレ - ンの不定性推定値 \hat{N}_{25} を計算する。 $\hat{\mathbf{r}}(0)$ の誤差を 1m 程度とすると , \hat{N}_{25} の誤差は $1/5.861 = 0.17$ 程度だから , この計算で N_{25} の正しい整数値を推定できる。

$$\hat{N}_{25} = \left[\mathbf{f}_{25} - \frac{\hat{\mathbf{r}}(0)}{\mathbf{I}_{25}} \right]_{\text{round off}} \quad (4.2)$$

ステップ 3 : L25 の位相観測方程式と上で求めた不定性から、レンジの近似値 $\hat{\mathbf{r}}(1)$ を再計算する。

$$\hat{\mathbf{r}}(1) = \mathbf{I}_{25} (\mathbf{f}_{25} - \hat{N}_{25}) \quad (4.3)$$

ステップ 4 : このレンジ $\hat{\mathbf{r}}(1)$ とワイドレ - ン L12 の位相観測方程式から , L12 の不定性推定値 \hat{N}_{12} を計算する。 L5 位相距離 $\mathbf{I}_5 \mathbf{f}_5$ の誤差を 0.013m 程度と仮定して(2.9)式と同様の見積もりをすると , $\hat{\mathbf{r}}(1)$ の誤差は 0.43m 程度だから , \hat{N}_{12} の誤差は 0.07 程度になるので , 整数化できる。

$$\hat{N}_{12} = \left[\mathbf{f}_{12} - \frac{\hat{\mathbf{r}}(1)}{\mathbf{I}_{12}} \right]_{\text{round off}} \quad (4.4)$$

ステップ 5 : L12 の位相観測方程式と上で求めた不定性から , レンジの近似値 $\hat{\mathbf{r}}(2)$ を再計算する。

$$\hat{\mathbf{r}}(2) = \mathbf{I}_{12} (\mathbf{f}_{12} - \hat{N}_{12}) \quad (4.5)$$

ステップ 6 : このレンジと L1 の位相観測方程式から , L1 の不定性推定値 \hat{N}_1 を計算する。 $\hat{\mathbf{r}}(2)$ の誤差は , (2.10)式より 0.057m 程度だから , \hat{N}_1 の誤差は 0.30 程度なので , 整数化できる。

$$\hat{N}_1 = \left[\mathbf{f}_1 - \frac{\hat{\mathbf{r}}(2)}{\mathbf{I}_1} \right]_{\text{round off}} \quad (4.6)$$

5 . 2 周波観測方程式と長基線解

5.1 2 周波観測方程式より導かれる不定性決定法

長基線の場合には , 電離層の影響を除去するために , 2 周波観測が必須である。波長の長いワイドレ - ンの不定性を求めた後に , これを用いて電離層フリ - 観測方程式を解く方法が長基線の場合に有効である。ワイドレ - ンの不定性の決定は , GIM (Global Ionosphere Model) などを用いて電離層影響を考慮したワイドレ - ン観測方程式を解くか , 以下で詳しく述べる擬似距離と位相距離の両方の計測値を用いる Melbourne-Wübbena による方法がある (Melbourne (1985), Wübbena (1985), Isshiki 2002)。

時刻を t , 衛星 i と受信機 \mathbf{a} との間の L_k , $\mathbf{k} = 1, 2$ 波による擬似距離計測値を $P_{ka}^i(t)$, 位相

距離計測値を $\Phi_{ka}^i(t)$, 真距離を $\mathbf{r}_a^i(t)$, L_1 波の電離層遅延を $I_a^i(t)$, 大気層遅延を $T_a^i(t)$ とすると , 2 周波 GPS 受信機による基本観測方程式は

$$P_{1a}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) + I_a^i(t) + T_a^i(t) + e_{1a}^i(t) \quad (5.1a)$$

$$P_{2a}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) + \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 I_a^i(t) + T_a^i(t) + e_{2a}^i(t) \quad (5.1b)$$

$$\Phi_{1a}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) - I_a^i(t) + T_a^i(t) + \mathbf{I}_1 N_{1a}^i + \mathbf{e}_{1a}^i(t) \quad (5.1c)$$

$$\Phi_{2a}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) - \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 I_a^i(t) + T_a^i(t) + \mathbf{I}_2 N_{2a}^i + \mathbf{e}_{2a}^i(t) \quad (5.1d)$$

で与えられる。この式は , 1 重差 , 2 重差に対してもまったく同じ形であるから , そのような差分量に関する方程式と考えてもよい。 $e_{ka}^i(t)$ と $\mathbf{e}_{ka}^i(t)$ はノイズ成分であり , $\mathbf{S}(e_{ka}^i(t)) \approx 1m$, $\mathbf{S}(\mathbf{e}_{ka}^i(t)) \approx 1cm$ である。すなわち , 前者は後者よりも二桁近く大きい。
 $e_{ka}^i(t)$ と $\mathbf{e}_{ka}^i(t)$ は

$$e_{1a}^i(t) = e_1^i(t) + e_{1a}(t) + e'_{1a}{}^i(t) + e''_{1a}{}^i(t) \quad (5.2a)$$

$$e_{2a}^i(t) = e_2^i(t) + e_{2a}(t) + e'_{2a}{}^i(t) + e''_{2a}{}^i(t) \quad (5.2b)$$

$$\mathbf{e}_{1a}^i(t) = \mathbf{e}_1^i(t) + \mathbf{e}_{1a}(t) + \mathbf{e}'_{1a}{}^i(t) + \mathbf{e}''_{1a}{}^i(t) \quad (5.2c)$$

$$\mathbf{e}_{2a}^i(t) = \mathbf{e}_2^i(t) + \mathbf{e}_{2a}(t) + \mathbf{e}'_{2a}{}^i(t) + \mathbf{e}''_{2a}{}^i(t) \quad (5.2d)$$

と書ける。ここで

$e_k^i(t)$: $P_{ka}^i(t)$ に含まれる衛星 i に起因するノイズ

$e_{ka}(t)$: $P_{ka}^i(t)$ に含まれる受信機 a に起因するノイズ

$e'_{ka}{}^i(t)$: $P_{ka}^i(t)$ に含まれる衛星 i と受信機 a を結ぶ

電波伝播路の電離層と大気以外に起因するノイズ

$e''_{ka}{}^i(t)$: $P_{ka}^i(t)$ に含まれるその他のノイズ

$\mathbf{e}_k^i(t)$: $\Phi_{ka}^i(t)$ に含まれる衛星 i に起因するノイズ

$\mathbf{e}_{ka}(t)$: $\Phi_{ka}^i(t)$ に含まれる受信機 a に起因するノイズ

$\mathbf{e}'_{ka}{}^i(t)$: $\Phi_{ka}^i(t)$ に含まれる衛星 i と受信機 a を結ぶ

電波伝播路の電離層と大気以外に起因するノイズ

$\mathbf{e}''_{ka}{}^i(t)$: $\Phi_{ka}^i(t)$ に含まれるその他のノイズ

である。

衛星 i と受信機 a の一つの組み合わせに対して、未知数は $\mathbf{r}_a^i(t)$, $I_a^i(t)$, $T_a^i(t)$, N_{1a}^i , N_{2a}^i の5個であるのに対して、方程式は4個であるから2周波数では解けない。しかし、 $\mathbf{r}_a^i(t)$ と $T_a^i(t)$ をまとめて $\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t)$ とすると、4個の未知数 $\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t)$, $I_a^i(t)$, N_{1a}^i , N_{2a}^i に対して4個の方程式であるから完全に解けるが、 $\mathbf{r}_a^i(t)$ と $T_a^i(t)$ を分離できない。

誤差を零として(5.1)式を解くと

$$\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) = \frac{-1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 P_{1a}^i(t) - P_{2a}^i(t) \right] \quad (5.3a)$$

$$I_a^i(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} (P_{1a}^i(t) - P_{2a}^i(t)) \quad (5.3b)$$

$$N_{1a}^i = \frac{\Phi_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \right] \frac{P_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} - 2 \frac{P_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} \right\} \quad (5.3c)$$

$$N_{2a}^i = \frac{\Phi_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left\{ 2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \frac{P_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} - \left[1 + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \right] \frac{P_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} \right\} \quad (5.3d)$$

を得る。

(5.3c)式と(5.3d)式より、いわゆる Narrow-lane および Wide-lane の初期位相不定性 N_{Na}^i および N_{Wa}^i を求めると

$$N_{Na}^i = N_{1a}^i + N_{2a}^i = \frac{\Phi_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{\Phi_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} - \frac{f_1 + f_2}{f_1 - f_2} \left(\frac{P_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} - \frac{P_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} \right) \quad (5.4a)$$

$$N_{Wa}^i = N_{1a}^i - N_{2a}^i = \frac{\Phi_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} - \frac{\Phi_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} - \frac{f_1 - f_2}{f_1 + f_2} \left(\frac{P_{1a}^i(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{P_{2a}^i(t)}{\mathbf{I}_2} \right) \quad (5.4b)$$

となる。 $f_1 = 154 \times 10.23 \text{MHz} \approx 1.58 \text{GHz}$, $f_2 = 120 \times 10.23 \text{MHz} \approx 1.23 \text{GHz}$ を代入すると、 $(f_1 - f_2)/(f_1 + f_2) \approx 0.124$ であるので、 $N_{Wa}^i = N_{1a}^i - N_{2a}^i$ については、擬似距離を介して入り込む誤差が約 1/10 になるので精度が高い。一方、 $(f_1 + f_2)/(f_1 - f_2) \approx 8.06$ となって、 $N_{Na}^i = N_{1a}^i + N_{2a}^i$ については、擬似距離を介して入り込む誤差が約 10 倍になるので精度が悪い。

(5.4b)式は、Melbourne-Wübbena Linear Combination とほぼ同じものである (Melbourne (1985), Wübbena (1985))。この線形結合を用いると、電離層遅延や対流圏遅

延の影響を受けないことが分かる。すなわち、基線長の影響を受けないで、Wide-lane の初期位相不定性を高精度に決定できる。

観測量の線形結合の代表的なものについてまとめておく。まず、Narrow-lane 結合であるが、仮想的な周波数 f_N 、波長 I_N

$$\frac{f_N}{c} = \frac{f_1 + f_2}{c} = \frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \quad (5.5a)$$

$$I_N = \frac{c}{f_1 + f_2} = 1 / \left(\frac{1}{I_1} + \frac{1}{I_2} \right) \quad (5.5b)$$

とすると

$$\begin{aligned} \Phi_{Na}^i(t) &= \frac{I_N}{I_1} \Phi_{1a}^i(t) + \frac{I_N}{I_2} \Phi_{2a}^i(t) \\ &= \mathbf{r}_a^i - \left[\frac{I_N}{I_1} + \frac{I_N}{I_2} \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 \right] I_a^i + I_N (N_{1a}^i + N_{2a}^i) + T_a^i(t) \\ &= \mathbf{r}_a^i - \frac{f_1}{f_2} I_a^i + I_N N_{Na}^i + T_a^i(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

を得る。

つぎに、Wide-lane 結合であるが、仮想的な周波数 f_W 、波長 I_W を

$$\frac{f_W}{c} = \frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} = \frac{f_1 - f_2}{c} \quad (5.7a)$$

$$I_W = \frac{c}{f_1 - f_2} = 1 / \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2} \right) \quad (5.7b)$$

とすると、以下の観測方程式を得る。

$$\begin{aligned} \Phi_{Wa}^i(t) &= \frac{I_W}{I_1} \Phi_{1a}^i(t) - \frac{I_W}{I_2} \Phi_{2a}^i(t) \\ &= \mathbf{r}_a^i - \left[\frac{I_W}{I_1} - \frac{I_W}{I_2} \left(\frac{f_1}{f_2} \right)^2 \right] I_a^i + I_W (N_{1a}^i - N_{2a}^i) + T_a^i(t) \\ &= \mathbf{r}_a^i + \frac{f_1}{f_2} I_a^i + I_W N_{Wa}^i + T_a^i(t) \end{aligned} \quad (5.8)$$

最後に、Ion-free 結合であるが、(5.6)式と(5.8)式の和を取ると、以下のように電離層遅延を含まない式が得られる。

$$\frac{1}{2} \left[\frac{I_N + I_W}{I_1} \Phi_{1a}^i(t) + \frac{I_N - I_W}{I_2} \Phi_{2a}^i(t) \right]$$

$$= \mathbf{r}_a^i + \frac{1}{2}(\mathbf{I}_N N_{Na}^i + \mathbf{I}_W N_{Wa}^i) + T_a^i(t) \quad (5.9a)$$

$$= \mathbf{r}_a^i + \frac{1}{f_1^2 - f_2^2} (f_1^2 \mathbf{I}_1 N_{1a}^i - f_2^2 \mathbf{I}_2 N_{2a}^i) + T_a^i(t) \quad (5.9b)$$

$$= \mathbf{r}_a^i + \left(\mathbf{I}_N N_{1a}^i + \frac{c f_2}{f_1^2 - f_2^2} N_{Wa}^i \right) + T_a^i(t) \quad (5.9c)$$

ランダム誤差を除去するために、時間平均を取ればよい。観測方程式の誤差は相互に独立で平均は零とする。 N_{1a}^i, N_{2a}^i は

$$N_{1a}^i = \frac{\overline{\Phi_{1a}^i}(t)}{\mathbf{I}_1} + \frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left\{ \left[1 + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \right] \frac{\overline{P_{1a}^i}(t)}{\mathbf{I}_1} - 2 \frac{\overline{P_{2a}^i}(t)}{\mathbf{I}_1} \right\} \quad (5.10a)$$

$$N_{2a}^i = \frac{\overline{\Phi_{2a}^i}(t)}{\mathbf{I}_2} + \frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left\{ 2 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \frac{\overline{P_{1a}^i}(t)}{\mathbf{I}_2} - \left[1 + \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \right] \frac{\overline{P_{2a}^i}(t)}{\mathbf{I}_2} \right\} \quad (5.10b)$$

と書ける。ここで、 $\overline{(\bullet)}(t) = \int_{t_0}^t \bullet dt / (t - t_0)$ は括弧内の量の過去のある時間区間の時間平均を表す。以下の数値計算例では、計測開始時刻から現時刻までの平均と考える。

(5.10a)式と(5.10b)式などにより、 $N_{1a}^i(t), N_{2a}^i(t)$ が正確に求まったものとする、(5.1c)式と(5.1d)式より $\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t), I_a^i(t)$ は

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) \\ &= -\frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left[\left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 \Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{2a}^i(t) - \mathbf{I}_1 \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2 N_{1a}^i + \mathbf{I}_2 N_{2a}^i \right] \end{aligned} \quad (5.11a)$$

$$I_a^i(t) = -\frac{1}{1 - \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^2} \left[\Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{2a}^i(t) - \mathbf{I}_1 N_{1a}^i + \mathbf{I}_2 N_{2a}^i \right] \quad (5.11b)$$

と書ける。(5.11)式によれば、 $N_{1a}^i(t), N_{2a}^i(t)$ が正確に求まるときには、 $\mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t), I_a^i(t)$ が位相距離 $\Phi_{1a}^i(t), \Phi_{2a}^i(t)$ から求められるので、前者が後者と同じ精度で求められる。したがって、(5.3a)式と(5.3b)式より求められる $\mathbf{r}_a^i(t), I_a^i(t)$ よりも格段に精度が向上する。 $N_{1a}^i(t), N_{2a}^i(t)$ が未知の場合でも、時間変化が正確に求まる。(5.3b)式および(5.11b)式は、geometry free 結合と呼ばれることがある。

(5.10a)式と(5.10b)式の差から、 $N_{Wa}^i(t)$ は短時間の観測でも正確に求まる。これを用いる

と，短時間の観測でも有効な $N_{1a}^i(t)$ と $N_{2a}^i(t)$ の推定方法として，以下のようなことが考えられる。すなわち，下記の2式について

$$\Phi_{1a}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) - I_a^i(t) + \mathbf{I}_1 N_{1a}^i \quad (5.1c)$$

$$\Phi_{wa}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) + \frac{f_1}{f_2} I_a^i(t) + \mathbf{I}_w N_{wa}^i \quad (5.8)$$

より

$$\Phi_{1a}^i(t) - \Phi_{wa}^i(t) = - \left(1 + \frac{f_1}{f_2} \right) I_a^i(t) + \mathbf{I}_1 N_{1a}^i - \mathbf{I}_w N_{wa}^i \quad (5.12a)$$

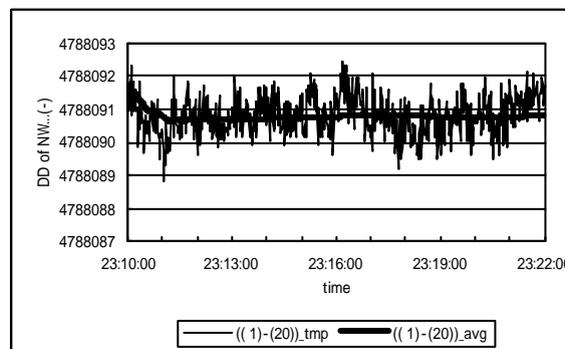
$$\frac{f_1}{f_1 + f_2} \Phi_{1a}^i(t) + \frac{f_2}{f_1 + f_2} \Phi_{wa}^i(t) = \mathbf{r}_a^i(t) + T_a^i(t) + \mathbf{I}_N N_{1a}^i + \frac{cf_2}{f_1^2 - f_2^2} N_{wa}^i \quad (5.12b)$$

となる。(5.12b)式は，電離層フリ - 結合に他ならない。(5.12a)式から， $I_a^i(t)$ が推定できれば $N_{1a}^i(t)$ の推定が可能であるが， $I_a^i(t)$ については三つの考え方がある。

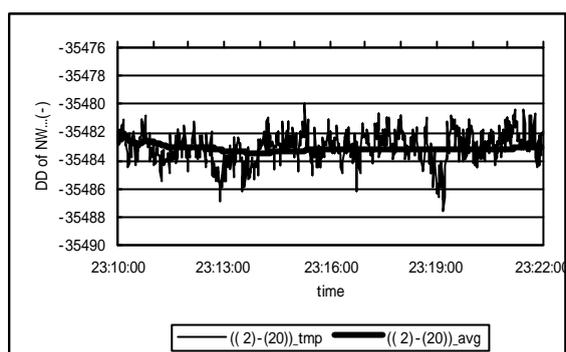
- (1) 短基線の場合には無視してよい。長基線の場合には，GIM (Global Ionosphere Model) などから推定する。
- (2) 長基線の場合には，(5.3b)式と(5.11b)式から $I_a^i(t)$ を求められる可能性がある。
(5.11b)式は電離層遅延 $I_a^i(t)$ の変動成分を高精度に与えるので，(5.3b)式が適切に扱われると， $I_a^i(t)$ を正確に推定できる可能性がある。
- (3) 3周波数の場合には，3番目の周波数をうまく選ぶと，(5.12a)式と同様な式をもうひとつ得るので，これらを連立させて $N_{1a}^i(t)$ と $I_a^i(t)$ を解く。

(5.12a)式から， $I_a^i(t)$ が推定できないときは，(5.12b)式を探索法で解いて $N_{1a}^i(t)$ を決定することになるが，実質的な波長がナロ - レ - ン (0.107m) と小さくなるので，精密軌道を用いるなど計算精度を上げねばならない。

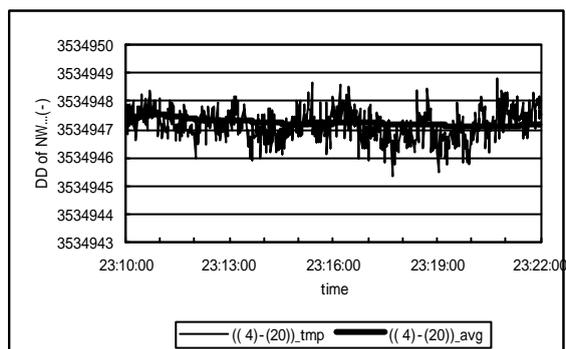
図5.1と表5.1に，ワイドレ - ン LW の初期位相不定性 $N_w = N_1 - N_2$ の短基線の場合の2重差 DD の収束の状況を示す。基線長は240mである。細線と太線は，それぞれ(5.3c,d)式と(5.10a,b)式に基づく計算結果である。(5.10a,b)式に基づく結果は，良好な収束を示している。



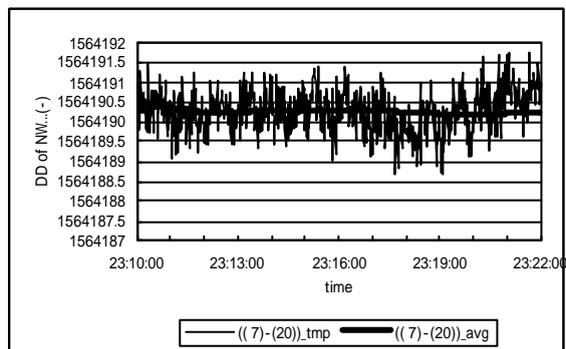
(a) PRN01とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



(b) PRN02とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



(c) PRN04とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



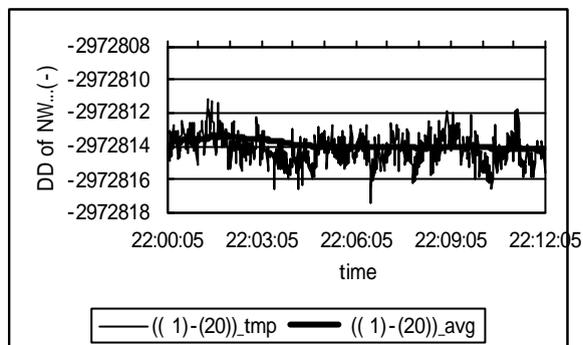
(d) PRN07とPRN20の2重差 (基線長: 240m)

図5.1 基線長が小さな場合(240m)のワイドレ - ン LW の初期位相不定性 N_w の2重差。
細線は(5.3c, d) 式に, 太線は(5.10a, b) 式に基づく結果

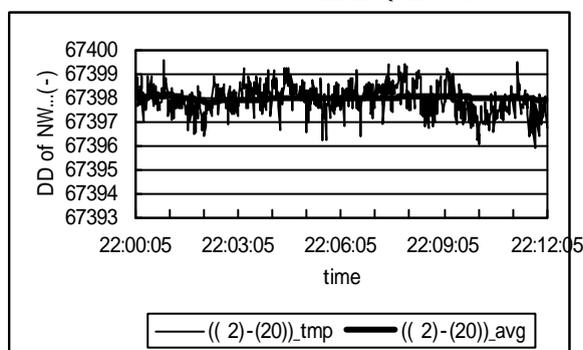
表5.1 初期位相不定性 N_w の2重差の収束状況 (基線長240m: 単位wave)

No. of Epoch	((1)-(20))	((2)-(20))	((4)-(20))	((7)-(20))
31	4788091	-35483	3534947	1564190
61	4788091	-35483	3534948	1564190
121	4788091	-35483	3534947	1564190
181	4788091	-35483	3534947	1564190
301	4788091	-35483	3534947	1564190
421	4788091	-35483	3534947	1564190
721	4788091	-35483	3534947	1564190

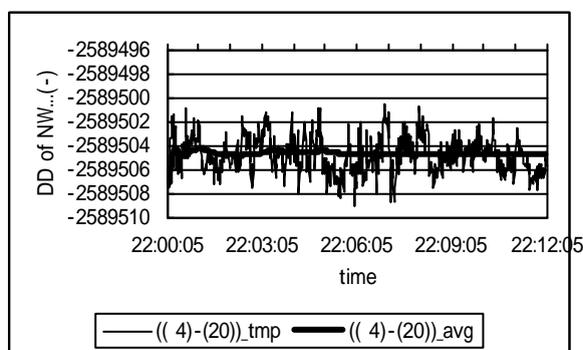
本計算法は基線長の影響を大きく受けないので、基線長が大きくなっても基線長の小さな場合と同じように収束する。図 5.2 と表 5.2 にそのような例を示す。この場合の観測点と基準点間の基線長は 401km である。



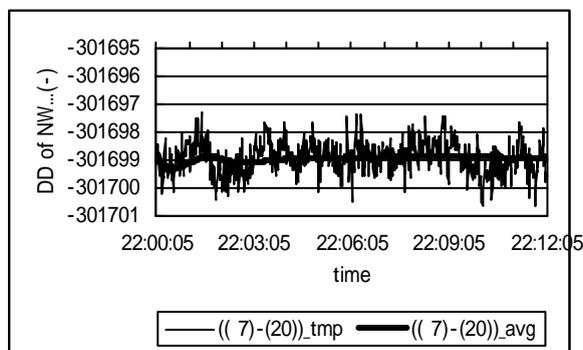
(a) PRN01 と PRN20 の2重差 (基線長 : 401km)



(b) PRN02 と PRN20 の2重差 (基線長 : 401km)



(c) PRN04 と PRN20 の2重差 (基線長 : 401km)



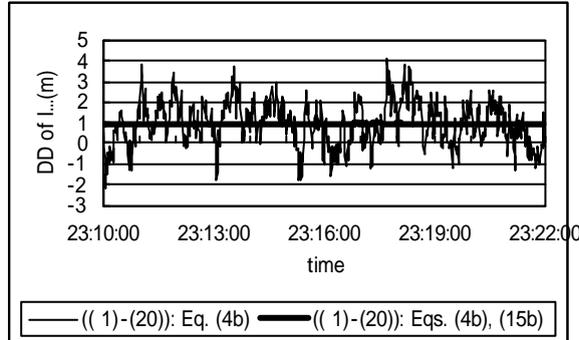
(d) PRN07 と PRN20 の2重差 (基線長 : 401km)

図5.2 基線長が大きな場合 (401km) のワイドレ - ン LW の初期位相不定性 N_w の2重差。
細線は(5.3c, d) 式に, 太線は(5.10a, b) 式に基づく結果

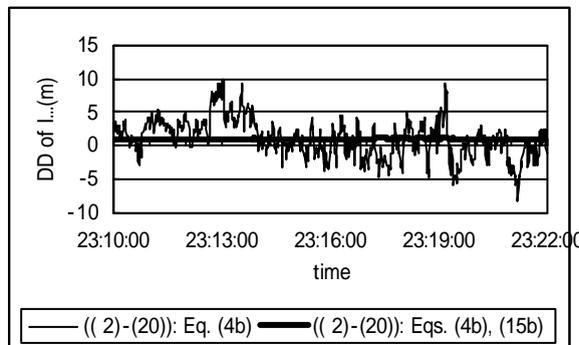
表5.2 初期位相不定性 N_w の2重差の収束状況 (基線長401km: 単位wave)

No. of Epoch	((1)-(20))	((2)-(20))	((4)-(20))	((7)-(20))
31	-2972814	67398	-2589505	-301699
61	-2972814	67398	-2589504	-301699
121	-2972813	67398	-2589505	-301699
181	-2972814	67398	-2589505	-301699
301	-2972814	67398	-2589504	-301699
421	-2972814	67398	-2589505	-301699
721	-2972814	67398	-2589505	-301699

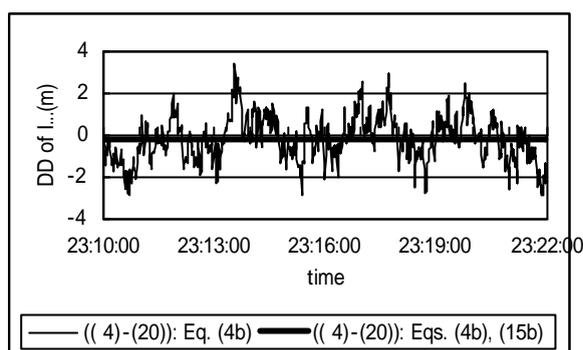
つぎに, 電離層遅延 2 重差 $(\nabla \Delta I)_{0,1}^{i,20}$ を推定する。(5.11b)式によると, 初期位相が未知でも位相距離データを用いて変動成分を高精度に推定できる。時間平均値成分は(5.3b)式を用いて擬似距離成分から推定することにする。図 5.3 に, (5.3b)式により擬似距離から求めた電離層遅延 2 重差と上述の推定方法で求めた電離層遅延 2 重差を示す。基線長は 240m という極めて小さな場合であるから, 電離層遅延の 2 重差の平均値はゼロであるべきである。しかし, かなり大きな平均値を有することが分かる。すなわち, 擬似距離には 2 重差で除去できないバイアスがあることを示しており, (5.3b)式から電離層遅延を求めることには問題があるといえよう。



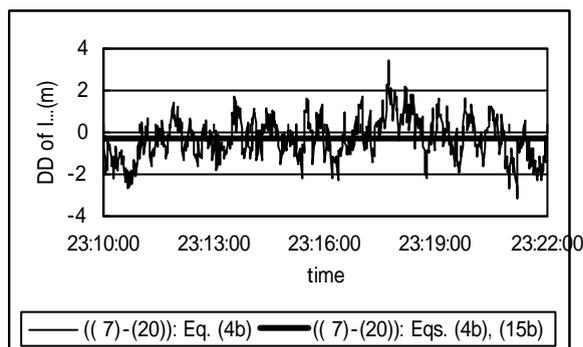
(a) PRN01とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



(b) PRN02とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



(c) PRN04とPRN20の2重差 (基線長: 240m)



(d) PRN07とPRN20の2重差 (基線長: 240m)

図5.3 (5.3b)式と(5.11b)式より求めた電離層遅延 (基線長: 240m)。細線は(5.3b)式から求めたもの、太線は(5.3b)式と(5.11b)式から求めた結果

従来法でも計算が可能な短基線の実験結果に関して、本論の「2周波観測方程式 + Wide-lane 法」を用いて初期位相不定性 2重差の推定を行ったものと、立命館大学理工学研究科・杉本研究室 (Rits) の「Kalman Filter + LAMBDA 法」による結果と比較したところ、表 5.3 と表 5.4 に示すように、本論 (IMA) の $(\nabla\Delta N_w)_{0,1}^{i,20}$ と $(\nabla\Delta N_1)_{0,1}^{i,20}$ がそれぞれ Ritz の L1 と LW の初期位相不定性 2重差と完全に一致することが判明した。L1 の初期位相不定性 2重差は、(5.12a)式において電離層遅延を無視したものをを用いた。

表 5.3 ワイドレーン LW の初期位相不定性 $(\nabla\Delta N_w)_{0,1}^{i,20}$ 推定値の比較

Sat. No.	Notation	$(\nabla\Delta N_w)_{0,1}^{i,20}$ by IMA	$(\nabla\Delta N_w)_{0,1}^{i,20}$ by Rits
01	((01)-(20))	4788091	4788091
02	((02)-(20))	-35483	-35483
04	((04)-(20))	3534947	3534947
07	((07)-(20))	1564190	1564190

表 5.4 L1 の初期位相不定性 $(\nabla\Delta N_1)_{0,1}^{i,20}$ 推定値の比較

Sat. No.	Notation	$(\nabla\Delta N_1)_{0,1}^{i,20}$ by IMA	$(\nabla\Delta N_1)_{0,1}^{i,20}$ by Rits
01	((01)-(20))	14417934	14417934
02	((02)-(20))	-169681	-169681
04	((04)-(20))	13783519	13783519
07	((07)-(20))	6753030	6753030

別の例について、古野電気(株)技術研究所に計算していただいたが、本方法による初期位相不定性と従来からの方法によるものが完全に一致した。

5.2 長基線の場合の不定性および座標決定

基線長が長くなると、衛星軌道誤差、対流圏遅延および電離層遅延の影響を除去しないと、初期位相不定性を決定できなくなる。衛星軌道誤差については IGS (International GPS Service) により提供される精密軌道を用いることで解決できる。対流圏遅延は適切な天頂遅延モデルとマッピング関数を用いることにより、不定性決定を可能とする程度に誤差を除去できる。最大の問題は、電離層遅延の取り扱いである(Hugeltoeber et al. (2001))。

図 5.4 に示すのは、長基線の場合も可能な考え方である。Melbourne-Wübbena 結合あるいはワイドレ - ン観測方程式によりワイドレ - ンの不定性 $2 \text{重差}(\nabla\Delta)N_w$ を決定した後に、(5.12b)式で与えられる電離層フリ - 観測方程式を用いて、 L_1 の不定性 $(\nabla\Delta)N_1$ を決定する。実質波長が $\lambda_N = 0.11m$ と小さいので、精密軌道が必要となる。 $N_w = N_1 - N_2$ であるから、 $(\nabla\Delta)N_2$ も決定できる。

参考までに、表 5.5 に、基線長と軌道、対流圏、電離層補正の選択をまとめたものを示す(Schaer et al. (1999))。中位の基線長から電離層影響を考慮すべきとしているが、厳しすぎるように思われる。図 5.4 のように、電離層フリ - 結合を用いる場合には、観測データが十分にあれば、数 100 km まで電離層影響を無視しても合理的な結果が得られる。

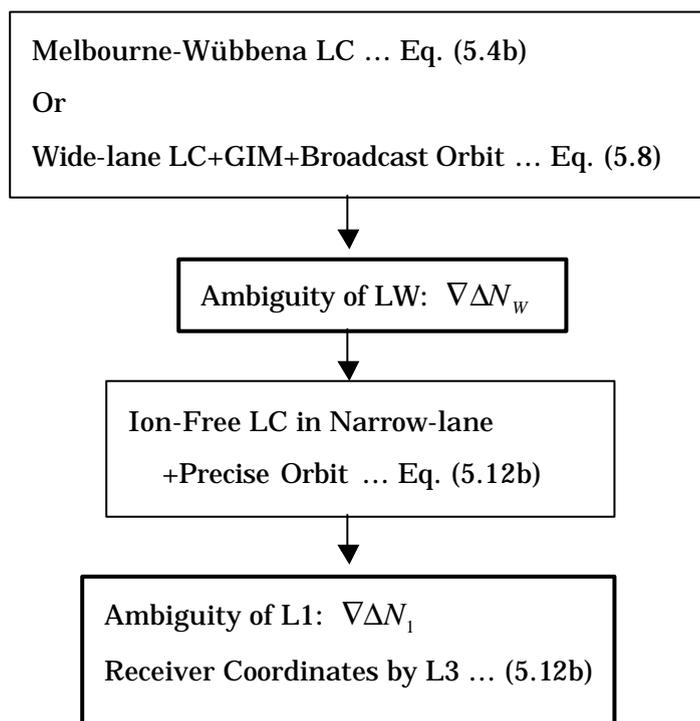


図 5.4 長基線の場合の電離層遅延と受信機座標の推定

表 5.5 基線長と軌道，対流圏，電離層補正の選択

基線長	検討例	軌道	対流圏	電離層
短：0～10km	6km BL Zimmerwald ～ Wabern	放送軌道でも可	記述なし	記述なし (使用しないでもよい)
中：10～20km	17km BL Zimmerwald ～ Thun	放送軌道でも可	対流圏モデル (標準大気を使用)	GIM が必須 SIP が有効
長：20km～	74km BL Zimmerwald ～ Muttenz	精密軌道	同上	GIM が必須 SIP が必須

注) 精密軌道：IGS (International GPS Service) などにより提供されている

対流圏モデル：modified Hopfield，Saastamoinen などの天頂遅延モデル + $1/\cos z$ ，
Neill などのマッピング関数

GIM：Global Ionosphere Map (全地球電離層マップ)

SIP：Stochastic Ionosphere Parameter (確率過程電離層パラメータ)

参考文献

- [1] 土屋 淳，辻 宏道，(1995)，「GPS 測定の基礎」，(社)日本測量協会。
- [2] Goad, C. C., (1998), "Single-Site GPS Models", GPS for Geodesy edited by P. J. G. Teunissen and A. Kleusberg, 2nd edition, Springer, pp. 437-456.
- [3] Hatch, R., (1990), Instantaneous Ambiguity Resolution, Proc. Kinematic Systems in Geodesy, Surveying, and Remote Sensing, KIS Symposium, Banff, Canada, pp.299-308.
- [4] Hugelobler, H., Schaer, S. and Fridez, P., (2001), Bernese GPS Software Version 4.2, Astronomical Institute, University of Berne.
- [5] Hwang, P., (1991), Kinematic GPS for Differential Positioning: Resolving Integer Ambiguities on the Fly, Navigation, vol.38, No.1, pp.1-15.
- [6] Isshiki, H., (2002), An Application of Wide-lane to Long Baseline GPS Measurements (2), ION GPS 2002, The Institute of Navigation.
- [7] Joosten, P. and Tberius, C., (2000), Fixing Ambiguities: Are you Sure They're Right?, GPS World, vol.11, no.5, pp.46-51.
- [8] Melbourne, W. G., (1985), The Case for Ranging in GPS Based Geodetic Systems, Proceedings 1st International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, edited by Clyde Goad, pp. 403-412, U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland.
- [9] Misra, P., Enge, P., (2001), Global Positioning System, Ganga-Jamuna Press.
- [10] Shaer, S., Beutler, G., Rothacher, M., Brockmann, E., Wiget, A. and Wild, U., (1999), The Impact of the Atmosphere and Other Systematic Errors on Permanent GPS Networks, The IAG Symposium on Positioning, Birmingham, UK, July 21, pp. 373-380, Springer.
- [11] Wübbena, G., (1985), Software Developments for Geodetic Positioning with GPS Using TI 4100 Code and Carrier Measurements, Proceedings 1st International Symposium on Precise Positioning with the Global Positioning System, edited by Clyde Goad, pp. 403-412, U. S. Department of Commerce, Rockville, Maryland.

付録 A 最小二乗法

$\{l^*\}$ を観測量ベクトル, $\{x\}$ を未知物理量ベクトル, $\{e\}$ を観測誤差ベクトルとして, 観測方程式:

$$\{l^*\} = [a]\{x\} + \{e\} \quad (\text{A1})$$

を, 最小二乗法で解いて未知物理量の推定値を求める。すなわち

$$\{e\}^T [p] \{e\} = (\{l^*\} - [a]\{x\})^T [p] (\{l^*\} - [a]\{x\}) = \min \quad (\text{A2})$$

とする。ここで, $[p]$ は観測値の分散から作られる重み行列とする。

これより, 正規方程式:

$$[N]\{\hat{x}\} = \{U\} \quad (\text{A3})$$

が求まる。ここで

$$[N] = [a]^T [p] [a] \quad (\text{A4a})$$

$$\{U\} = [a]^T [p] \{l^*\} \quad (\text{A4b})$$

とする。

正規方程式の解として未知物理量の推定値が求まるが, このことは観測量の誤差を求めることでもある。すなわち

$$\{\hat{e}\} = \{l^*\} - [a]\{\hat{x}\} = \{l^*\} - [a]([a]^T [p] [a])^{-1} [a]^T [p] \{l^*\} \quad (\text{A5})$$

により, 観測量の誤差を推定できることが分かる。すなわち, 最小二乗法を用いると, 未知物理量の推定値を求めるばかりでなくて, 観測量の誤差の推定量も求まることが分かる。また, 未知物理量の分散や信頼区間を求めることもできる。