§9.3　相反定理と作用定理

つぎに，以下に示されるような二つの問題(問題1および問題2)を考える。すなわち，$i=1,2$として，問題iを以下のように定義する。

Kelvin 条件$[K_i]$:

$$\frac{\partial\phi_i}{\partial x}=u_i,\quad \frac{\partial\phi_i}{\partial z}=w_i \quad in\ \Omega \tag{9.3.1a}$$

$$\phi_i=\bar{g}_i \quad on\ S_M \tag{9.3.1b}$$

$$\phi_i=\frac{\mathbf{i}g}{\omega}\varsigma_i+\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\bar{p}_i \quad on\ S_F \tag{9.3.1c}$$

Dirichlet 条件$[D]$：

$$\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}=\bar{h}_i \quad in\ \Omega \tag{9.3.2a}$$

$$w_i=\mathbf{i}\omega\varsigma_i \quad on\ S_F \tag{9.3.2b}$$

$$u_i n_x+w_i n_z=\bar{f}_i \quad on\ S_K \tag{9.3.2c}$$

$$u_i n_x+w_i n_z=0 \quad on\ S_B \tag{9.3.2d}$$

$$u=\mp\mathbf{i}k_0^{\pm}\phi-\begin{cases}\dfrac{2g}{\omega}k_0^+\bar{A}^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\dfrac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\\ 0\end{cases} \quad on\ S_O^{\pm} \tag{9.3.2e}$$

ここで，$\bar{p}_i, \bar{h}_i, \bar{g}_i, \bar{f}_i, \bar{A}^+{}_i$は既知量とする。

(9.3.1)式と(9.3.2)式より

$$\begin{aligned}0&=\iint_\Omega\left(\frac{\partial u_i}{\partial x}+\frac{\partial w_i}{\partial z}-\bar{h}_i\right)\phi_j\,dxdz\\
&=-\iint_\Omega\left(u_i\frac{\partial\phi_j}{\partial x}+w_i\frac{\partial\phi_j}{\partial z}+\bar{h}_i\phi_j\right)dxdz+\int_{S_F+S_M+S_K+S_B+S_O^++S_O^-}(u_i n_x+w_i n_z)\phi_j\,ds\\
&=-\iint_\Omega(u_iu_j+w_iw_j)dxdz-g\int_{S_F}\varsigma_i\varsigma_j\,dx-\mathbf{i}k_0^+\int_{S_O^+}\phi_i\phi_j\,ds-\mathbf{i}k_0^-\int_{S_O^-}\phi_i\phi_j\,ds\\
&\quad-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+\bar{A}_i^+\bar{A}_j^+e^{2\mathbf{i}k_0^+x_O^+}\int_{-h^+}^0\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz\\
&\quad-\iint_\Omega\bar{h}_i\phi_j\,dxdz+\frac{i}{\rho\omega}\int_{S_F}\frac{\partial\phi_i}{\partial z}\bar{p}_j\,dx+\int_{S_M}\frac{\partial\phi_i}{\partial n}\bar{g}_j\,ds+\int_{S_K}\bar{f}_i\phi_j\,ds\\
&\quad-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+\bar{A}_i^+a_{0j}^+\int_{-h^+}^0\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz\end{aligned} \tag{9.3.3}$$

を得る。ここで，a_{0j}^+ は発散波の振幅であり，(9.2.16)式が用いられている。

(9.3.3)式を書き直すと

$$\iint_\Omega \left(u_i u_j + w_i w_j\right) dxdz + g\int_{S_F} \varsigma_i \varsigma_j\, dx + \mathbf{i}k_0^+ \int_{S_O^+} \phi_i \phi_j\, ds + \mathbf{i}k_0^- \int_{S_O^-} \phi_i \phi_j\, ds$$

$$+\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_i \overline{A}^+{}_j e^{2\mathbf{i}k_0^+ x_O^+} \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz$$

$$= -\iint_\Omega \overline{h}_i \phi_j\, dxdz + \frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F} \frac{\partial \phi_i}{\partial z}\, \overline{p}_j\, dx + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_i}{\partial n}\, \overline{g}_j\, ds + \int_{S_K} \bar{f}_i \phi_j\, ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_i a_0^+{}_j \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz \tag{9.3.4a}$$

となる。i と j を入れ替えると

$$\iint_\Omega \left(u_j u_i + w_j w_i\right) dxdz + g\int_{S_F} \varsigma_j \varsigma_i\, dx + \mathbf{i}k_0^+ \int_{S_O^+} \phi_j \phi_i\, ds + \mathbf{i}k_0^- \int_{S_O^-} \phi_j \phi_i\, ds$$

$$+\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_j \overline{A}^+{}_i e^{2ik_0^+ x_O^+} \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz$$

$$= -\iint_\Omega \overline{h}_j \phi_i\, dxdz + \frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F} \frac{\partial \phi_j}{\partial z}\, \overline{p}_i\, dx + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_j}{\partial n}\, \overline{g}_i\, ds + \int_{S_K} \bar{f}_j \phi_i\, ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_j a_0^+{}_i \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz \tag{9.3.4b}$$

を得る。これより，相反定理

$$-\iint_\Omega \overline{h}_1 \phi_2\, dxdz + \frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F} \frac{\partial \phi_1}{\partial z}\, \overline{p}_2\, dx + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_1}{\partial n}\, \overline{g}_2\, ds + \int_{S_K} \bar{f}_1 \phi_2\, ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_1 a_0^+{}_2 \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz$$

$$= -\iint_\Omega \overline{h}_2 \phi_1\, dxdz + \frac{\mathbf{i}}{\rho}\int_{S_F} \frac{\partial \phi_2}{\partial z}\, \overline{p}_1\, dx + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_2}{\partial n}\, \overline{g}_1\, ds + \int_{S_K} \bar{f}_2 \phi_1\, ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \overline{A}^+{}_2 a_0^+{}_1 \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}\right]^2 dz \tag{9.3.5}$$

が導かれる。相反定理の意味するところは，「1の方向の浮体の運動が2の方向に誘起する力は，2 の方向の浮体の運動が 1 の方向に誘起する力に等しい」というような関係である。

(9.2.17)式を参考にして相反定理を変形する。すなわち，(9.3.5)式の左辺

第 2，3 項と右辺第 2，3 項を入れ換えると

$$-\iint_\Omega \bar{h}_1\phi_2\,dxdz-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}_1\frac{\partial\phi_2}{\partial z}dx-\int_{S_M}\bar{g}_1\frac{\partial\phi_2}{\partial n}ds+\int_{S_K}\bar{f}_1\phi_2\,ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+\bar{A}_1^+a_{02}^+\int_{-h^+}^0\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz$$

$$=-\iint_\Omega \bar{h}_2\phi_1\,dxdz-\frac{1}{\rho}\int_{S_F}\bar{p}_2\frac{\partial\phi_1}{\partial z}dx-\int_{S_M}\bar{g}_2\frac{\partial\phi_1}{\partial n}ds+\int_{S_K}\bar{f}_2\phi_1\,ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+\bar{A}_2^+a_{01}^+\int_{-h^+}^0\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz \tag{9.3.6}$$

となるが，これを作用定理と呼ぶことにする。(9.3.10)式の定義を拡張して

$$<\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_j>=-\iint_\Omega \bar{h}_i\phi_j\,dxdy-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}_i\frac{\partial\phi_j}{\partial z}dx-\int_{S_M}\bar{g}_i\frac{\partial\phi_j}{\partial n}ds+\int_{S_K}\bar{f}_i\phi_j\,ds$$

$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+\bar{A}_i^+a_{0j}^+\int_{-h^+}^0\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz \tag{9.3.7}$$

とすると，作用定理は

$$\langle\bar{\mathbf{h}}_1,\phi_2\rangle=\langle\bar{\mathbf{h}}_2,\phi_1\rangle \tag{9.3.8}$$

と書ける。$\langle\bar{\mathbf{h}}_1,\phi_2\rangle$を作用積分と呼ぶことにする。

作用積分と変分原理の停留値との関係を求めてみよう。(9.3.7)式の線形性により

$$\begin{aligned}&\langle\bar{\mathbf{h}}_i+\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i+\phi_j\rangle-\langle\bar{\mathbf{h}}_i-\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i-\phi_j\rangle\\&\quad=\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_i\rangle+\langle\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i\rangle+\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_j\rangle+\langle\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_j\rangle\\&\quad\quad-\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_i\rangle+\langle\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i\rangle+\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_j\rangle-\langle\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_j\rangle\\&\quad=2\langle\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i\rangle+2\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_j\rangle\end{aligned} \tag{9.3.9}$$

が言える。(9.3.8)式を代入すると

$$\langle\bar{\mathbf{h}}_i,\phi_j\rangle=\frac{1}{4}\Big(\langle\bar{\mathbf{h}}_i+\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i+\phi_j\rangle-\langle\bar{\mathbf{h}}_i-\bar{\mathbf{h}}_j,\phi_i-\phi_j\rangle\Big) \tag{9.3.10}$$

が成り立つ。(9.2.18)式より，この式の右辺は変分原理の停留値となることが分かる。

一方

$$u_{1(\pm)2}=u_1\pm u_2,\quad v_{1(\pm)2}=v_1\pm v_2,\quad \phi_{1(\pm)2}=\phi_1\pm\phi_2 \tag{9.3.11}$$

と書くことにすると，線形の境界値問題であるから，(9.3.1)式と(9.3.2)式より，これらは以下の境界値問題の解である。

Kelvin 条件[$K_{1(\pm)2}$]:

$$u_{1(\pm)2}=\frac{\partial\phi_{1(\pm)2}}{\partial x},\quad w_{1(\pm)2}=\frac{\partial\phi_{1(\pm)2}}{\partial z}\quad in\ \Omega \tag{9.3.12a}$$

$$\phi_{1(\pm)2}=\bar{g}_1\pm\bar{g}_2\quad on\ S_M \tag{9.3.12b}$$

$$\phi_{1(\pm)2}=\frac{ig}{\omega}\varsigma_{1(\pm)2}+\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}(\bar{p}_1\pm\bar{p}_2)\quad on\ S_F \tag{9.3.12c}$$

Dirichlet 条件[$D_{1(\pm)2}$]:

$$\frac{\partial u_{1(\pm)2}}{\partial x}+\frac{\partial w_{1(\pm)2}}{\partial z}=\bar{h}_1\pm\bar{h}_2\quad in\ \Omega \tag{9.3.13a}$$

$$w_{1(\pm)2}=\mathbf{i}\omega\varsigma_{1(\pm)2}\quad on\ S_F \tag{9.3.13b}$$

$$u_{1(\pm)2}n_x+w_{1(\pm)2}n_y=\bar{f}_1\pm\bar{f}_2\quad on\ S_K \tag{9.3.13c}$$

$$u_{1(\pm)2}n_x+w_{1(\pm)2}n_z=0\quad on\ S_B \tag{9.3.13d}$$

$$u_{1(\pm)2}=\mp\mathbf{i}k_0^{\pm}\phi_{1(\pm)2}-\begin{cases}\dfrac{2g}{\omega}k_0^+(A_1^+\pm A_2^+)e^{\mathbf{i}k_0^+x}\cosh k_0^+(z+h^+)\\ 0\end{cases}\quad on\ S_O^{\pm} \tag{9.3.13e}$$

上述の議論の最も簡単な例として

$$\bar{h}_1=\delta(x-\xi)\delta(z-\zeta),\ \bar{p}_1=0,\ \bar{g}_1=0,\ \bar{f}_1=0,\ \bar{A}^+{}_1=0 \tag{9.3.14a}$$

$$\bar{h}_2=\bar{h},\ \bar{p}_2=\bar{p},\ \bar{g}_2=\bar{g},\ \bar{f}_2=\bar{f},\ \bar{A}^+{}_2=\bar{A}^+ \tag{9.3.14b}$$

を考えると

$$\langle\bar{\mathbf{h}}_1,\phi_2\rangle=-\iint_\Omega\delta(x-\xi)\delta(z-\zeta)\phi_2(x,z)\,dxdz=-\phi_2(\xi,\zeta) \tag{9.3.15}$$

を得る。

(9.3.14)式の代わりに

$$\bar{h}_1=\delta'(x-\xi)\delta(z-\zeta),\ \bar{p}_1=0,\ \bar{g}_1=0,\ \bar{f}_1=0,\ \bar{A}^+{}_1=0 \tag{9.3.16a}$$

$$\bar{h}_2=\bar{h},\ \bar{p}_2=\bar{p},\ \bar{g}_2=\bar{g},\ \bar{f}_2=\bar{f},\ \bar{A}^+{}_2=\bar{A}^+ \tag{9.3.16b}$$

を考えると

$$\langle\bar{\mathbf{h}}_1,\phi_2\rangle=-\iint_\Omega\delta'(x-\xi)\delta(z-\zeta)\phi_2(x,z)\,dxdz$$

$$=\iint_\Omega\delta(x-\xi)\delta(z-\zeta)\phi_{2x}(x,z)\,dxdz=\phi_{2x}(\xi,\zeta) \tag{9.3.17}$$

を得る。すなわち，変関数の値およびその微分などを汎関数の停留値とし

て評価できる。

波の中で運動する物体の連成流体力の問題を考えてみよう。左右揺れに対するﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを$\phi_1 = \phi_S$，上下揺れに対するﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを$\phi_2 = \phi_H$とすると

$$\bar{h}_1 = 0,\ \bar{p}_1 = 0,\ \bar{g}_1 = 0,\ \bar{f}_1 = n_x,\ \bar{A}^+{}_1 \neq 0 \tag{9.3.18a}$$

$$\bar{h}_2 = 0,\ \bar{p}_2 = 0,\ \bar{g}_2 = 0,\ \bar{f}_2 = n_z,\ \bar{A}^+{}_2 \neq 0 \tag{9.3.18b}$$

であり，上下揺れによる流体力の左右揺れ成分は

$$\int_{S_K} n_x \phi_H \, ds = \langle \bar{\mathbf{h}}_1, \phi_2 \rangle + \frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \bar{A}_1^+ a_{02}^+ \int_{-h^+}^0 \left[\frac{\cosh k_0^+ (z + h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \right]^2 dz \tag{9.3.19}$$

となる。(9.3.7)式より

$$\int_{S_K} n_x \phi_H \, ds = \frac{1}{2} (any\ one\ of) \begin{Bmatrix} \Pi_{ISK}[u_{S(+)H}{}^{*1}, w_{S(+)H}{}^{*1}, \varsigma_{S(+)H}{}^{*1}, \phi_{S(+)H}{}^{*1}] \\ \Pi_{ISKD}[u_{S(+)H}{}^{*2}, w_{S(+)H}{}^{*2}, \varsigma_{S(+)H}{}^{*2}, \phi_{S(+)H}{}^{*2}] \\ \Pi_{ISD}[\phi_{S(+)H}{}^{*3}] \end{Bmatrix}$$

$$- \frac{1}{2} (any\ one\ of) \begin{Bmatrix} \Pi_{ISK}[u_{S(-)H}{}^{*1}, w_{S(-)H}{}^{*1}, \varsigma_{S(-)H}{}^{*1}, \phi_{S(-)H}{}^{*1}] \\ \Pi_{ISKD}[u_{S(-)H}{}^{*2}, w_{S(-)H}{}^{*2}, \varsigma_{S(-)H}{}^{*2}, \phi_{S(-)H}{}^{*2}] \\ \Pi_{ISD}[\phi_{S(-)H}{}^{*3}] \end{Bmatrix} \tag{9.3.20}$$

となる。ここで，$(any\ one\ of)$は，右側の量のどれか一つを取ることを意味する。また，$u_{S(\pm)H}{}^{*1}, w_{S(\pm)H}{}^{*1}, \varsigma_{S(\pm)H}{}^{*1}, \phi_{S(\pm)H}{}^{*1}$は，(9.2.7)式より

$$\Pi_{ISK}[u, w, \varsigma, \phi] = \frac{1}{2} \iint_\Omega \left(u^2 + w^2 \right) dx dz + \frac{g}{2} \int_{S_F} \varsigma^2 dx + \frac{\mathbf{i}k_0^+}{2} \int_{S_O^+} \phi^2 dz + \frac{\mathbf{i}k_0^-}{2} \int_{S_O^-} \phi^2 dz = stationary \tag{9.3.21a}$$

under

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad in\ \Omega \tag{9.3.21b}$$

$$w = \mathbf{i}\omega\varsigma \quad on\ S_F \tag{9.3.21c}$$

$$un_x + wn_z = n_x \pm n_z \quad on\ S_K \tag{9.3.21d}$$

$$un_x + wn_z = 0 \quad on\ S_B \tag{9.3.21e}$$

$$u = \mp \mathbf{i} k_0^{\pm}\phi - \begin{cases} \dfrac{2g}{\omega} k_0^{+}(\overline{A}_1^{+} \pm \overline{A}_2^{+}) e^{\mathbf{i}k_0^{+}x} \dfrac{\cosh k_0^{+}(z+h^{+})}{\cosh k_0^{+}h^{+}} \\ 0 \end{cases} \quad on\ S_O^{\pm} \quad (9.3.21f)$$

の近似解である。$u_{S(\pm)H}{}^{*2}$, $w_{S(\pm)H}{}^{*2}$, $\varsigma_{S(\pm)H}{}^{*2}$, $\phi_{S(\pm)H}{}^{*2}$ は，(9.2.11)式より

$$\begin{aligned}
\Pi_{ISDK}[u,w,\varsigma,\phi] = &-\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}u + \frac{\partial\phi}{\partial z}w - \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right)\right]dxdz \\
&+\frac{g}{2}\int_{S_F}\varsigma^2 dx + \mathbf{i}\omega\int_{S_F}\varsigma\phi\, dx \\
&-\frac{\mathbf{i}k_0^{+}}{2}\int_{S_O^{+}}\phi^2 dz - \frac{\mathbf{i}k_0^{-}}{2}\int_{S_O^{-}}\phi^2 dz \\
&-\int_{S_M}\overline{g}\left(un_x + wn_z\right)ds + \int_{S_K}(n_x \pm n_z)\phi ds \\
&-\frac{2g}{\omega}k_0^{+}(\overline{A}_1^{+} \pm \overline{A}_2^{+})e^{\mathbf{i}k_0^{+}x_O^{+}}\int_{S_O^{+}}\phi\,\frac{\cosh k_0^{+}(z+h^{+})}{\cosh k_0^{+}h^{+}}dz \\
&= stationary \qquad (9.3.22)
\end{aligned}$$

の近似解である。$\phi_{S(\pm)H}{}^{*3}$ は(9.2.12)式より

$$\begin{aligned}
\Pi_{ISD}[\phi] = &-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dxdz + \frac{\omega^2}{2g}\int_{S_F}\phi^2 dx \\
&-\frac{\mathbf{i}k_0^{+}}{2}\int_{S_O^{+}}\phi^2 dz - \frac{\mathbf{i}k_0^{-}}{2}\int_{S_O^{-}}\phi^2 dz + \int_{S_K}(n_x \pm n_y)\phi ds \\
&-\frac{2g}{\omega}k_0^{+}(\overline{A}_1^{+} \pm \overline{A}_2^{+})e^{\mathbf{i}k_0^{+}x_O^{+}}\int_{S_O^{+}}\phi\,\frac{\cosh k_0^{+}(z+h^{+})}{\cosh k_0^{+}h^{+}}dz \\
&= stationary \qquad (9.3.23)
\end{aligned}$$

の近似解である。

最後に，入射波が静止浮体に及ぼす波強制力について考えよう。そこで

$$\overline{h}_1 = 0,\ \overline{p}_1 = 0,\ \overline{g}_1 = 0,\ \overline{f}_1 = n_x,\ \overline{A}^{+}{}_1 = 0 \qquad (9.3.24a)$$

$$\overline{h}_2 = 0,\ \overline{p}_2 = 0,\ \overline{g}_2 = 0,\ \overline{f}_2 = 0,\ \overline{A}^{+}{}_2 = \overline{A}^{+} \qquad (9.3.24b)$$

とすると

$$\int_{S_K} n_x \phi_2 \, ds = \langle \bar{\mathbf{h}}_1, \phi_2 \rangle$$

$$= \langle \bar{\mathbf{h}}_2, \phi_1 \rangle = -\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ \bar{A}^+ a_{01}^+ \int_{-h^+}^{0} \left[\frac{\cosh k_0^+ (z + h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \right]^2 dz \qquad (9.3.25)$$

を得る。すなわち，$x = +\infty$ から入射する入射波が静止浮体に及ぼす波強制力の左右揺れ成分 $\int_{S_K} n_x \phi_2 \, ds$ は，浮体が静止流体中で上下揺れしたときに，$x = +\infty$ に放射される発散波の振幅 a_{01}^+ に比例している。これは，Haskind の定理と呼ばれる関係である。

§9.4　参考文献

[9.1] 一色浩，”造波問題における変分法的取り扱い”，日本造船学会第 2 回耐航性ｼﾝﾎﾟｼﾞｳﾑ，(1977).

[9.2] 一色浩，”自由表面を有するﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ流の変分原理について”，関西造船協会誌，第 166 号，(1977).

[9.3] M. Bessho, “On Boundary Value Problems of an oscillating Body Floating on Water”, Mem. of Defense Academy, 8, 1, (1968).

[9.4] T. Mizuno, “On Swaying Motion of Some Surface-Piercing Bodies”, Mem. of Defense Academy, 9, 1, (1969).

[9.5] 水野俊明，”半没柱状体の左右揺れおよび横揺れについて”，日本造船学会論文集，第 127 号，(1970).

[9.6] 佐尾邦久，前田久明，黄宗屹，”軸対象柱体の上下揺れについて”， 日本造船学会論文集，第 130 号，(1971).

[9.7] 佐尾邦久，”軸対象物体の左右揺れおよび横揺れ”，日本造船学会論文集，第 140 号，(1976).

[9.8] M. Bessho, “Variational Approach to Steady Ship Wave Problem”, 8th Symposium on Naval Hydrodynamics, Pasadena, Calif., (1970).

[9.9] H. Isshiki & J. H. Hwang, “An Axi-symmetric Dock in Waves”, Seoul National Univ., Korea, College of Engineering, Dept. of Naval Architecture, Rep. No. 73-1, (1973).

[9.10] H. Isshiki & J. H. Hwang, “An Axi-symmetric Dock in Waves”, 大韓造船学会誌，13，2，(1976)

[9.11] K. J. Bai, “A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface”, Univ. of Calif. Berkeley, College of Engineering, Rep. NA 72-2, (1972).
[9.12] K. J. Bai & R. W. Yeung, “Numerical Solutions to Free-Surface Flow Problems”, 10th Symposium on Naval Hydrodynamics, (1974).
[9.13] 杉浦正憲，一色浩，”水波に関する Sommerfeld の放射条件とその数値計算への応用について”，関西造船協会誌，第 156 号，(1975).
[9.14] 瀬戸秀幸，山本善之，”有限要素法による定常波動問題の基礎的研究”， 日本造船学会論文集，第 136 号，(1974).
[9.15] H. Seto & Y. Yamamoto, “Finite Element Analysis of Surface Wave Problems”, Proc. of 1st Int. Conf. on Numerical Naval Hydrodynamics, (1975).
[9.16] 山本善之，中野孝昭，光田哲久，”有限要素法による定常波動問題の基礎的研究(第 2 報)”，日本造船学会論文集，第 140 号，(1976).
[9.17] 瀬戸秀幸，”有限要素法による定常波動問題の基礎的研究”， 日本造船学会論文集，第 141 号，(1977).
[9.18] 山本善之, 中野孝昭, ”深海域における定常波動問題の近似解析法”, 日本造船学会論文集，第 142 号，(1977).
[9.19] 増田光一，加藤渉，”有限要素法による軸対称柱体に働く流体力の研究”，建築学会関東地区大会研究報告集，(1977).