§9.2　水波の放射条件とその変分法的取り扱い

2 次元空間における重力波の問題は，空間的には 2 次元であるが，波動としては 1 次元である。本節ではそのような問題を論ずる。

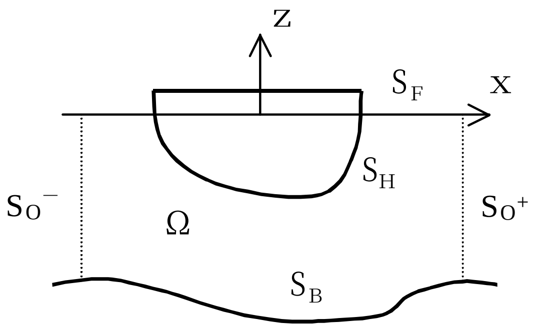

図 3.1　流体の運動

図 3.1 に座標系$O(x,z)$その他を示す。完全流体の 2 次元非回転流れを仮定する。水の存在する領域をΩとし，Ωの境界Sを自由表面，物体表面，水底，仮想的な外部境界に分け，それぞれ$S_F, S_H, S_B, S_O^{\pm}$とする。さらに，物体表面S_HはS_MとS_Kよりなるものとし，境界S_M上では速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙϕが指定され, 境界S_K上では法線方向速度$u_n = un_x + wn_z$が指定されるものとする。水の速度ﾍﾞｸﾄﾙを$\mathbf{u} = (u, w)$，速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙをϕ，自由表面の変位をς，水の密度をρで表す。$\mathbf{n} = (n_x, n_z)$は境界Sの外向き単位法線ﾍﾞｸﾄﾙを表わす。仮想的な外部境界の外では，水深が一様で$x \le x_O^-, x \ge x_O^+$のとき$h^{\pm}$とする。Ω内の流体運動は，以下の境界値問題により表される。

Kelvin 条件$[K]$：

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} = w \quad in\ \Omega \tag{9.2.1a}$$

$$\phi = \frac{\mathbf{i}g}{\omega}\varsigma + \frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\bar{p} \quad on\ S_F \tag{9.2.1b}$$

$$\phi = \bar{g} \quad on\ S_M \tag{9.2.1c}$$

Dirichlet 条件$[D]$：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \bar{h} \quad in\ \Omega \tag{9.2.2a}$$

$$w = \mathbf{i}\omega\varsigma \quad on\ S_F \tag{9.2.2b}$$

$$un_x + wn_z = \bar{f} \quad on\ S_K \tag{9.2.2c}$$

$$un_x + wn_z = 0 \quad on\ S_B \tag{9.2.2d}$$

$$u = \mp \mathbf{i} k_0^{\pm} \phi - \begin{cases} \dfrac{2g}{\omega} k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i} k_0^+ x} \dfrac{\cosh k_0^+ (z + h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \\ 0 \end{cases} \quad on\ S_O^{\pm} \tag{9.2.2e}$$

ここで，$\bar{g}, \bar{h}, \bar{f}, \bar{p}$ は既知量とする。$\mathbf{i}$ は $\sqrt{-1}$ と意味する。

今まで完全流体の非回転運動の場合には, (9.2.1)式を力学的条件, (9.2.2)式を運動学的条件と呼んで来たが，本章では呼び方を変えることとした。本書を書き進むうちに，このような物理的概念に基づく分類は適切でないことに気付いた。すなわち，ある問題の運動学的条件および力学的条件と同じ数学的構造を持つ条件が，別の問題ではそれぞれ力学的条件および運動学的条件になるのである。例えば，完全流体の非回転運動では，その運動学的条件は連続の条件であるが，膜のたわみの問題では，同じ数学的構造を持つのは力の平衡条件，すなわち力学的条件である。そこで，本章ではこのような物理的な分類を止めて，数学的分類によることとした。完全流体の非回転運動の場合をﾍﾞ-ｽにして，Kelvin の原理の自然条件と同じ数学的構造を有するものを Kelvin 条件と呼び，Diricjlet の原理の自然条件と同じ数学的構造を有するものを Dirichlet 条件と呼ぶことにした。

(9.2.2e)式は，Sommerfeld の放射条件を入射波のある場合に拡張したものであり，Isshiki-Sommerfeld の放射条件と呼びたい。この式は，以下のようにして求まる。入射波の波振幅を A^+，発散波の振幅を $a_0^{\pm}$ とすると

$$\phi \approx \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathbf{i}g}{\omega} A^+ e^{\mathbf{i} k_0^+ x} \dfrac{\cosh k_0^+ (z + h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{\mathbf{i}g}{\omega} a_0^{\pm} e^{\mp \mathbf{i} k_0^{\pm} x} \frac{\cosh k_0^{\pm} (z + h^{\pm})}{\cosh k_0^{\pm} h^{\pm}}$$

$$as\ x \to \infty \tag{9.2.3}$$

と書ける。これより

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} \approx \begin{Bmatrix} \dfrac{\mathbf{i}g}{\omega} \mathbf{i} k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i} k_0^+ x} \dfrac{\cosh k_0^+ (z + h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \\ 0 \end{Bmatrix} \mp \frac{\mathbf{i}g}{\omega} \mathbf{i} k_0^{\pm} a_0^{\pm} e^{\mp \mathbf{i} k_0^{\pm} x} \frac{\cosh k_0^{\pm} (z + h^{\pm})}{\cosh k_0^{\pm} h^{\pm}}$$

$$as\ x \to \infty \tag{9.2.4}$$

であるので，この両式から $a_0^{\pm}$ を消去すると(9.2.2e)式が導ける。ここで，$k_0^{\pm}$ は分散方程式

$$k_0^{\pm} \cosh k_0^{\pm} (z + h^{\pm}) = \omega^2 / g \tag{9.2.5}$$

の解とする。

Dirichlet 条件[D]の下で，仮想変分δu, δw, $\delta\varsigma$, $\delta\phi$ を考えると

$$
\begin{aligned}
0 &= -\iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}-u\right)\delta u+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}-w\right)\delta w\right]dxdz+\int_{S_M}(\phi-\bar{g})(\delta un_x+\delta wn_z)ds \\
&\quad +\int_{S_F}(\phi-\frac{\mathbf{i}g}{\omega}\varsigma-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\bar{p})\delta w dx \\
&= \iint_\Omega (u\delta u+w\delta w)dxdz+\iint_\Omega \phi\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial\delta w}{\partial z}\right)dxdz \\
&\quad -\frac{\mathbf{i}g}{\omega}\int_{S_F}\varsigma\delta w dx-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}\delta w dx \\
&\quad -\int_{S_M} g(\delta un_x+\delta wn_z)ds-\int_{S_K}\phi(\delta un_x+\delta wn_z)ds \\
&\quad -\int_{S_B}\phi\ (\delta un_x+\delta wn_x)ds \\
&\quad -\int_{S_O^+}\phi\delta u\, dz+\int_{S_O^-}\phi\delta u\, dz \\
&= \delta\left[\frac{1}{2}\iint_\Omega (u^2+w^2)dxdz+\frac{g}{2}\int_{S_F}\varsigma^2 dx+\frac{\mathbf{i}k_0^+}{2}\int_{S_O^+}\phi^2 dz+\frac{\mathbf{i}k_0^-}{2}\int_{S_O^-}\phi^2 dz\right. \\
&\quad \left. +\frac{1}{\rho}\int_{S_F}\bar{p}\varsigma\, dx-\int_{S_M}\bar{g}(un_x+wn_z)ds\right] \qquad (9.2.6)
\end{aligned}
$$

を得る。したがって，変分原理

$$
\begin{aligned}
\Pi_{ISK}[u,w,\varsigma,\phi] &= \frac{1}{2}\iint_\Omega (u^2+w^2)dxdz+\frac{g}{2}\int_{S_F}\varsigma^2 dx+\frac{\mathbf{i}k_0^+}{2}\int_{S_O^+}\phi^2 dz+\frac{\mathbf{i}k_0^-}{2}\int_{S_O^-}\phi^2 dz \\
&\quad +\frac{1}{\rho}\int_{S_F}\bar{p}\varsigma\, dx-\int_{S_M}\bar{g}(un_x+wn_z)ds = stationary
\end{aligned}
$$

$$under\ [D] \qquad (9.2.7)$$

が導かれる。この変分原理を，Isshiki-Sommerfeld-Kelvin の原理と呼びたい。(9.2.2b)式と(9.2.2e)式を用いて，(9.2.7)式で与えられる汎関数Π_{ISK}からς,ϕを消去することも可能である。

(9.2.7)式で与えられる変分問題において，Lagrange の未定乗数λを導入して Dirichlet 条件[D]を緩和すると

$$\Pi'_{ISKD}[u,w,\varsigma,\phi,\lambda]=\Pi_{ISK}[u,w,\varsigma,\phi]$$
$$+\iint_{\Omega}\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}-\bar{h}\right)dxdy-\int_{S_F}\lambda\left(w-\mathbf{i}\omega\varsigma\right)ds$$
$$-\int_{S_K}\lambda\left(un_x+wn_z-\bar{f}\right)ds-\int_{S_B}\lambda\left(un_x+wn_z\right)ds$$
$$-\int_{S_O^+}\lambda\left[u+\mathbf{i}k_0^+\phi+\frac{2g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]dz$$
$$+\int_{S_O^-}\lambda\left(u-\mathbf{i}k_0^-\phi\right)dz=stationary \qquad (9.2.8)$$

を得る。実際に停留条件を求めると

$$0=\delta\Pi'_{ISKD}=\iint_{\Omega}\left(u\delta u+w\delta w\right)dxdz$$
$$+g\int_{S_F}\varsigma\delta\varsigma\,dx+\mathbf{i}k_0^+\int_{S_O^+}\phi\delta\phi\,dz+\mathbf{i}k_0^-\int_{S_O^-}\phi\delta\phi\,dz$$
$$+\frac{1}{\rho}\int_{S_F}\bar{p}\delta\varsigma\,dx-\int_{S_M}\bar{g}\left(\delta un_x+\delta wn_z\right)ds$$
$$+\iint_{\Omega}\lambda\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial\delta w}{\partial z}\right)dxdz-\int_{S_F}\lambda\left(\delta w-\mathbf{i}\omega\delta\varsigma\right)ds$$
$$-\int_{S_K}\lambda\left(\delta un_x+\delta wn_z\right)ds-\int_{S_B}\lambda\left(\delta un_x+\delta wn_z\right)ds$$
$$-\int_{S_O^+}\lambda\,(\delta u+\mathbf{i}k_0^+\delta\phi)\,dz+\int_{S_O^-}\lambda\,(\delta u-\mathbf{i}k_0^-\delta\phi)\,dz$$
$$+\iint_{\Omega}\delta\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}-\bar{h}\right)dxdz-\int_{S_F}\delta\lambda\left(w-\mathbf{i}\omega\varsigma\right)ds$$
$$-\int_{S_K}\delta\lambda\left(un_x+wn_z-\bar{f}\right)ds-\int_{S_B}\delta\lambda\left(un_x+wn_z\right)ds$$
$$-\int_{S_O^+}\delta\lambda\left[u+\mathbf{i}k_0^+\phi+\frac{2g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]dz$$
$$+\int_{S_O^-}\delta\lambda\left(u-\mathbf{i}k_0^-\phi\right)dz$$
$$=-\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\lambda}{\partial x}-u\right)\delta u+\left(\frac{\partial\lambda}{\partial z}-w\right)\delta w\right]dxdz$$

$$
\begin{aligned}
&+i\omega\int_{S_F}\left(\lambda-\frac{ig}{\omega}\varsigma-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\bar{p}\right)\delta\varsigma\, dx+\int_{S_M}(\lambda-\bar{g})(\delta u n_x+\delta w n_z)ds \\
&-\mathbf{i}k_0^+\int_{S_O^+}(\lambda-\phi)\delta\phi\, dz-\mathbf{i}k_0^-\int_{S_O^-}(\lambda-\phi)\delta\phi\, dz \\
&+\iint_\Omega \delta\lambda\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}-\bar{h}\right)dxdz-\int_{S_F}\delta\lambda(w-\mathbf{i}\omega\varsigma)ds \\
&-\int_{S_K}\delta\lambda\left(un_x+wn_z-\bar{f}\right)ds-\int_{S_B}\delta\lambda(un_x+wn_z)ds \\
&-\int_{S_O^+}\delta\lambda\left[u+\mathbf{i}k_0^+\phi+\frac{2g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]dz \\
&+\int_{S_O^-}\delta\lambda\left(u-\mathbf{i}k_0^-\phi\right)dz \qquad (9.2.9)
\end{aligned}
$$

である。これより，(9.2.8)式の変分問題の自然条件は

Kelvin 条件[K*]：

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=u,\quad \frac{\partial\lambda}{\partial z}=w \quad in\ \Omega \qquad (9.2.10a)$$

$$\lambda=\frac{\mathbf{i}g}{\omega}\varsigma+\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\bar{p} \quad on\ S_F \qquad (9.2.10b)$$

$$\lambda=\bar{g} \quad on\ S_M \qquad (9.2.10c)$$

$$\lambda=\phi \quad on\ S_O^\pm \qquad (9.2.10d)$$

Dirichlet 条件[D]：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=\bar{h} \quad in\ \Omega \qquad (9.2.2a)$$

$$w=\mathbf{i}\omega\varsigma \quad on\ S_F \qquad (9.2.2b)$$

$$un_x+wn_z=\bar{f} \quad on\ S_K \qquad (9.2.2c)$$

$$un_x+wn_z=0 \quad on\ S_B \qquad (9.2.2d)$$

$$u=\mp\mathbf{i}k_0^\pm\phi-\begin{cases}\dfrac{2g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\dfrac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\\ 0\end{cases} \quad on\ S_O^\pm \qquad (9.2.2e)$$

となるので，(9.2.7)式の変分問題の自然条件は，Kelvin 条件[K]であることが分かる。

Π'_{ISDK} を書き換えると

$$\Pi_{ISDK}[u,w,\varsigma,\phi] = \Pi'_{ISDK}[u,w,\varsigma,\phi,\lambda]\Big|_{\lambda=\phi}$$

$$= -\iint_{\Omega}\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}u + \frac{\partial\phi}{\partial z}w - \frac{1}{2}\left(u^2 + w^2\right)\right]dxdz$$

$$+\frac{g}{2}\int_{S_F}\varsigma^2 dx + \mathbf{i}\omega\int_{S_F}\varsigma\phi\, dx$$

$$-\frac{\mathbf{i}k_0^+}{2}\int_{S_O^+}\phi^2 dz - \frac{\mathbf{i}k_0^-}{2}\int_{S_O^-}\phi^2 dz$$

$$-\iint_{\Omega}\bar{h}\phi dxdz + \frac{1}{\rho}\int_{S_F}\bar{p}\varsigma\, dx$$

$$+\int_{S_M}(\phi - \bar{g})(un_x + wn_z)ds + \int_{S_K}\bar{f}\phi ds$$

$$-\frac{2g}{\omega}k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i}k_0^+ x_O^+}\int_{S_O^+}\phi\ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}dz$$

$$= stationary \qquad (9.2.11)$$

を得る。この変分原理は，弾性学の分野で Hellinger-Reissner 型の変分原理と呼ばれるﾀｲﾌﾟのものである。この変分原理を，Isshiki-Sommerfeld-Kelvin-Dirichlet の変分原理と呼びたい。

(9.2.11)式で与えられる変分問題において, Kelvin 条件[K]を拘束すると

$$\Pi_{ISD}[\phi] = \Pi_{ISKD}[u,w,\varsigma,\phi]\Big|_{under\ \ [K]}$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dxdz$$

$$+\frac{\omega^2}{2g}\int_{S_F}\phi^2 dx - \frac{\mathbf{i}\omega}{\rho g}\int_{S_F}\bar{p}\phi\, dx - \frac{1}{2\rho^2 g}\int_{S_F}\bar{p}^2 dx$$

$$-\frac{\mathbf{i}k_0^+}{2}\int_{S_O^+}\phi^2 dz - \frac{\mathbf{i}k_0^-}{2}\int_{S_O^-}\phi^2 dz$$

$$-\iint_{\Omega}\bar{h}\phi dxdy + \int_{S_K}\bar{f}\phi ds$$

$$-\frac{2g}{\omega}k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i}k_0^+ x_O^+}\int_{S_O^+}\phi\ \frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+}dz$$

$$= stationary \tag{9.2.12}$$

が求まる。この変分原理を，Isshiki-Sommerfeld-Dirichlet の変分原理と呼びたい。

停留条件を求めてみると

$$\begin{aligned}
0 = \delta\Pi_{ISD} &= -\iint_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z} \right) dxdz \\
&\quad + \frac{\omega^2}{g}\int_{S_F} \phi\delta\phi\, dx - \frac{\mathbf{i}\omega}{\rho g}\int_{S_F} \overline{p}\delta\phi\, dx \\
&\quad - \mathbf{i}k_0^+ \int_{S_O^+} \phi\delta\phi\, dz - \mathbf{i}k_0^- \int_{S_O^-} \phi\delta\phi\, dz \\
&\quad - \iint_\Omega \overline{h}\,\delta\phi\, dxdz + \int_{S_K} \overline{f}\,\delta\phi\, ds \\
&\quad - \frac{2g}{\omega} k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i}k_0^+ x_O^+} \int_{S_O^+} \delta\phi\, \frac{\cosh k_0^+ (z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} dz \\
&= \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} - \overline{h} \right) \delta\phi\, dxdz - \int_{S_F} \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\phi + \frac{\mathbf{i}\omega}{\rho g}\overline{p} \right) \delta\phi\, dx \\
&\quad - \int_{S_K} \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} - \overline{f} \right) \delta\phi\, ds - \int_{S_B} \frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\, ds \\
&\quad - \int_{S_O^+} \left[\frac{\partial\phi}{\partial x} + \mathbf{i}k_0^+\phi + \frac{2g}{\omega} k_0^+ A^+ e^{\mathbf{i}k_0^+ x} \frac{\cosh k_0^+ (z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \right] \delta\phi\, dz \\
&\quad + \int_{S_O^-} \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} - \mathbf{i}k_0^-\phi \right) \delta\phi\, dz
\end{aligned} \tag{9.2.13}$$

であるので，(9.2.9)式で与えられる変分問題の自然条件は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = \overline{h} \quad in\ \Omega \tag{9.2.14a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = \frac{\omega^2}{g}\phi - \frac{\mathbf{i}\omega}{\rho g}\overline{p} \quad on\ S_F \tag{9.2.14b}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \overline{f} \quad on\ S_K \tag{9.2.14c}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad on\ S_B \tag{9.2.14d}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\mp\mathbf{i}k_0^{\pm}\phi-\begin{cases}\dfrac{2g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\dfrac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+} \\ 0\end{cases}\quad on\ S_O^{\pm} \tag{9.2.14e}$$

となる。これは，(9.2.1)式を用いて，(9.2.2)式の u, w, ς を消去したものである。したがって，Dirichlet 条件[D]が自然条件である。変分問題(9.2.7)式と(9.2.12)式においては，拘束条件と自然条件が逆になっている。

u,w,ς,ϕ が正解のとき

$$\Pi_{ISD}[\phi]=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\bar{h}\phi dxdz-\frac{\mathbf{i}}{2\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}\frac{\partial\phi}{\partial z}dx-\frac{1}{2}\int_{S_M}\bar{g}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2}\int_{S_K}\bar{f}\phi ds$$
$$-\frac{g}{\omega}k_0^+A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x_O^+}\int_{S_O^+}\phi\cosh k_0^+(z+h^+)dz$$
$$=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\bar{h}\phi dxdz-\frac{\mathbf{i}}{2\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}\frac{\partial\phi}{\partial z}dx-\frac{1}{2}\int_{S_M}\bar{g}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2}\int_{S_K}\bar{f}\phi ds$$
$$-\frac{\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+(A^+)^2e^{2\mathbf{i}k_0^+x_O^+}\int_{-h^+}^{0}\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz$$
$$-\frac{\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+A^+a_0^+\int_{-h^+}^{0}\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz \tag{9.2.15}$$

となる。ここで，(9.2.3)式より導かれる

$$\int_{-h^+}^{0}\phi\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}dz\approx\int_{S_O^+}\left[\frac{ig}{\omega}A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x}\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right.$$
$$\left.+\frac{ig}{\omega}a_0^+e^{-\mathbf{i}k_0^+x}\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}dz$$
$$=\frac{ig}{\omega}A^+e^{\mathbf{i}k_0^+x_O^+}\int_{-h^+}^{0}\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz$$
$$+\frac{ig}{\omega}a_0^+e^{-\mathbf{i}k_0^+x_O^+}\int_{-h^+}^{0}\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz\quad as\ x\to\infty \tag{9.2.16}$$

が用いられている。

そこで

$$\langle\bar{\mathbf{h}},\phi\rangle=-\iint_{\Omega}\bar{h}\phi dxdy-\frac{\mathbf{i}}{\rho\omega}\int_{S_F}\bar{p}\frac{\partial\phi}{\partial z}dx-\int_{S_M}\bar{g}\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\int_{S_K}\bar{f}\phi ds$$
$$-\frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2}k_0^+A^+a_0^+\int_{-h^+}^{0}\left[\frac{\cosh k_0^+(z+h^+)}{\cosh k_0^+h^+}\right]^2dz \tag{9.2.17}$$

とすると，正解u,v,ς,ϕに対して

$$2\Pi_{ISK} = 2\Pi_{ISKD} = 2\Pi_{ISD}$$

$$= \langle \bar{\mathbf{h}}, \phi \rangle - \frac{2\mathbf{i}g^2}{\omega^2} k_0^+ (A^+)^2 e^{2\mathbf{i}k_0^+ x_O^+} \int_{-h^+}^{0} \left[\frac{\cosh k_0^+ (z+h^+)}{\cosh k_0^+ h^+} \right]^2 dz \qquad (9.2.18)$$

が成り立つ。

§6.5 の場合と異なり，(9.2.7)式および(9.2.12)式で与えられる変分問題は単なる停留問題である。したがって，このような上下解の評価式は導けない。しかし，そのような場合にも$\langle \mathbf{h}, \phi \rangle$は，汎関数$\Pi_{ISK}, \Pi_{ISKD}, \Pi_{ISD}$の停留値として計算できる。このことは，近似解の精度が低くても，$\langle \mathbf{h}, \phi \rangle$は精度良く計算できることを意味する。