§9. 波動問題と変分原理

§6 および§8 では，完全流体の非回転流れについて論じた。§6 で論じたのは自由表面のない場合であり，§8 で論じたのは自由表面はあるが変分原理が対象とする流体領域が有限の場合であって，いづれも無限遠方に進行する波動の存在を前提としない議論であった。

本章では，無限遠方に進行する波動が存在する場合について，波動問題と変分原理との関係を論じる。この場合には，まず波の放射条件をどう置くかが問題となる。

自由表面が存在する場合には，変分原理は単なる停留原理となり、最小(または最大)原理でなくなるので，§6 で述べたような上下界による誤差の推定などはできない。しかし，波の散乱と放射の間の興味ある関係を導くことができるなど，理論的に面白い結果が得られる。

§9.1　1 次元波動(棒の伸び縮み波)の放射条件とその変分法的取り扱い

まず最初に，純粋に 1 次元の波動について考える。単純な問題であるが，基本的なｱｲﾃﾞｱを見出して，検証することができる。

棒の伸び縮み波は，すべての波長の波が同じ速度で進む分散を伴わない波動であり，いわゆる波動方程式に従う。

外力を $f(t,x)$，ﾔﾝｸﾞ率を E，密度を ρ 面積 S の一様な断面の棒の軸に沿って x 軸を取る。時刻 t における棒の軸方向の変位を $u(t,x)$，応力を $\sigma_x(t,x)$ とする。このとき

$$E\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-f \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.1}$$

である。棒は $x=0$ を自由端として，$x=+\infty$ に無限に延びており，$x=+\infty$ より来る入射波は，$x=0$ で反射されて無限遠方に放射されるものとする。外力 f は零とする。正弦波を考え，時間項を $e^{\mathrm{i}\omega t}$ とし，以下においては空間項のみ考える。$\mathbf{i}$ は $\sqrt{-1}$ と意味する。このとき，棒の運動は境界値問題

Kelvin 条件[K]：

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{E}\sigma_x \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.2}$$

Dirichlet 条件[D]：

$$\frac{d\sigma_x}{dx} = -k^2 E u \qquad for\ \ 0 < x < x_O^+ \tag{9.1.3a}$$

$$\sigma_x(0) = 0 \tag{9.1.3b}$$

$$\sigma_x(x_O^+) = -\mathbf{i}kEu(x_O^+) + 2\mathbf{i}kEA^+ e^{\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.3c}$$

で記述できる。ここで，$k = \sqrt{\rho/E}\,\omega$ は波数であり，位相速度は $c = \omega/k = \sqrt{E/\rho}$ である。x_O^+ は十分遠方に取られた仮想境界とする。A^+ は入射波の変位振幅である。(9.1.3c)式は，変位 u を

$$u \approx A^+ e^{\mathbf{i}kx} + a_0^+ e^{-\mathbf{i}kx} \quad as\ \ x \to \infty \tag{9.1.4}$$

と仮定して導かれた。ここで，a_0^+ は反射波の振幅である。この問題では局所波(local wave)がないので，(9.1.4)式，したがって，(9.1.3c)式はいたる所で左辺と右辺が等しい。(9.1.3c)式は，いわゆる Sommerfeld の放射条件を入射波のある場合に拡張したものであり，Isshiki-Sommerfeld の放射条件と呼びたい。

Kelvin 条件および Dirichlet 条件というのは，完全流体の非回転運動の変分原理である Kelvin の原理および Dirichlet の原理の自然条件として与えられる条件と，数学的に同じ構造を持つ条件を指す。

物理的な観点からは，棒の伸び縮み問題の場合には，Kelvin 条件[K]は運動学的条件と，Dirichlet 条件[E]は力学的条件と呼ぶべきであるが，問題によっては，Kelvin 条件[K]が力学的条件に，Dirichlet 条件[D]が運動学的条件になる。例えば，流体を伝わる音波の問題はこうなる。すなわち，物理的な分類で分けると数学的分類が逆になってしまう。そこで，本章では数学的な議論が主となるので，数学的な分類に従うことにする。

Dirichlet 条件[D]の下に，仮想応力変分 $\delta\sigma_x$ を考えると

$$0 = -\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx} - \frac{1}{E}\sigma_x\right)\delta\sigma_x dx$$

$$= \frac{1}{E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x\delta\sigma_x dx + \int_0^{x_O^+} u\frac{d\delta\sigma_x}{dx}dx - u(x_O^+)\delta\sigma_x(x_O^+) + u(0)\delta\sigma_x(0)$$

$$= \frac{1}{E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x\delta\sigma_x dx - k^2 E\int_0^{x_O^+} u\delta u dx + \mathbf{i}kEu(x_O^+)\delta u(x_O^+)$$

$$= \delta \left\{ \frac{1}{2E} \int_0^{x_O^+} {\sigma_x}^2 dx - \frac{k^2 E}{2} \int_0^{x_O^+} u^2 dx + \frac{\mathbf{i}k}{2} E \left[u(x_O^+) \right]^2 \right\} \tag{9.1.5}$$

を得る。したがって，(9.1.2)式と(9.1.3)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$\Pi_{ISK}[\sigma_x, u] = \frac{1}{2E} \int_0^{x_O^+} {\sigma_x}^2 dx - \frac{k^2 E}{2} \int_0^{x_O^+} u^2 dx + \frac{\mathbf{i}k}{2} E \left[u(x_O^+) \right]^2 = stationary$$
$$under\ [D] \tag{9.1.6}$$

と等しい。この変分問題は完全流体の非回転流れにおける Kelvin の原理に相当するものであるので，Isshiki-Sommerfeld-Kelvin 原理と呼ぶことにする。(9.1.5)式より，この変分問題の自然条件は，Kelvin 条件[K]である。

このことを確かめる。そのために，Lagrange の未定乗数λを導入して，Dirichlet 条件[D]を緩和する。すなわち，汎関数

$$\begin{aligned}
\Pi'_{ISKD}[\sigma_x, u, \lambda] &= \Pi_{ISK}[\sigma_x, u] \\
&\quad + \int_0^{x_O^+} \lambda \left(\frac{d\sigma_x}{dx} + k^2 Eu \right) dx + \lambda(0)\sigma_x(0) \\
&\quad - \lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+) + \mathbf{i}kEu(x_O^+) - 2\mathbf{i}kEA^+ e^{ikx_O^+}] \\
&= stationary
\end{aligned} \tag{9.1.7}$$

を考える。停留条件を求めると

$$\begin{aligned}
0 = \delta\Pi'_{ISKD} &= \frac{1}{E} \int_0^{x_O^+} \sigma_x \delta\sigma_x dx - k^2 E \int_0^{x_O^+} u \delta u dx + \mathbf{i}kEu(x_O^+)\delta u(x_O^+) \\
&\quad + \int_0^{x_O^+} \lambda \left(\frac{d\delta\sigma_x}{dx} + k^2 E\delta u \right) dx + \lambda(0)\delta\sigma_x(0) \\
&\quad - \lambda(x_O^+)[\delta\sigma_x(x_O^+) + \mathbf{i}kE\delta u(x_O^+)] \\
&\quad + \int_0^{x_O^+} \delta\lambda \left(\frac{d\sigma_x}{dx} + k^2 Eu \right) dx + \delta\lambda(0)\sigma_x(0) \\
&\quad - \delta\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+) + \mathbf{i}kEu(x_O^+) - 2\mathbf{i}kEA^+ e^{ikx_O^+}] \\
&= -\int_0^{x_O^+} \left(\frac{d\lambda}{dx} - \frac{1}{E}\sigma_x \right) \delta\sigma_x dx + \rho\omega^2 \int_0^{x_O^+} (\lambda - u)\delta u dx \\
&\quad + \mathbf{i}kEu(x_O^+)\delta u(x_O^+) + \lambda(x_O^+)\delta\sigma_x(x_O^+) - \lambda(0)\delta\sigma_x(0) + \lambda(0)\delta\sigma_x(0)
\end{aligned}$$

$$-\lambda(x_O^+)[\delta\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kE\delta u(x_O^+)]$$

$$+\int_0^{x_O^+}\delta\lambda\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\delta\lambda(0)\sigma_x(0)$$

$$-\delta\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kEu(x_O^+)-2\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+}]$$

$$=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{d\lambda}{dx}-\frac{1}{E}\sigma_x\right)\delta\sigma_x dx+k^2E\int_0^{x_O^+}(\lambda-u)\delta u dx$$

$$-\mathbf{i}kE[\lambda(x_O^+)-u(x_O^+)]\delta u(x_O^+)$$

$$+\int_0^{x_O^+}\delta\lambda\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\delta\lambda(0)\sigma_x(0)$$

$$-\delta\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kEu(x_O^+)-2\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+}] \qquad (9.1.8)$$

であるので，(9.1.7)式の変分問題の自然条件は

Kelvin 条件[K*]：

$$\lambda=u \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \qquad (9.1.9a)$$

$$\frac{d\lambda}{dx}=\frac{1}{E}\sigma_x \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \qquad (9.1.9b)$$

$$\lambda(x_O^+)=u(x_O^+) \qquad (9.1.9c)$$

Dirichlet 条件[D]：

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=-k^2Eu \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \qquad (9.1.3a)$$

$$\sigma_x(0)=0 \qquad (9.1.3b)$$

$$\sigma_x(x_O^+)=-\mathbf{i}kEu(x_O^+)+2\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+} \qquad (9.1.3c)$$

であるので，(9.1.6)式の変分問題の自然条件は，Kelvin 条件[K]であることが分かる。

(9.1.7)式の変分問題を書き直すと

$$\Pi_{ISKD}[\sigma_x,u]=\Pi'_{ISKD}[\sigma_x,u,\lambda]\Big|_{\lambda=u}$$

$$=\frac{1}{2E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x{}^2dx-\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx+\frac{\mathbf{i}k}{2}E\left[u(x_O^+)\right]^2$$

$$+\int_0^{x_O^+} u\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\lambda(0)\sigma_x(0)$$

$$-u(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kEu(x_O^+)-2\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+}]$$

$$=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}\sigma_x-\frac{1}{2E}\sigma_x{}^2\right)dx+\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx+\frac{\mathbf{i}k}{2}E\left[u(x_O^+)\right]^2$$

$$+u(x_O^+)\sigma_x(x_O^+)-u(0)\sigma_x(0)+u(0)\sigma_x(0)$$

$$-u(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kEu(x_O^+)-2\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+}]$$

$$=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}\sigma_x-\frac{1}{2E}\sigma_x{}^2\right)dx+\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx-\frac{\mathbf{i}k}{2}E\left[u(x_O^+)\right]^2$$

$$+2\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)$$

$$=stationary \tag{9.1.10}$$

を得る。この変分問題は，弾性学で Hellinger-Reissner の原理と呼ぶものの拡張である。以下では Isshiki-Sommerfeld-Kelvin-Dirichlet の原理と呼ぶ。

(9.1.10)式の変分問題において，Kelvin 条件[K]を拘束すると

$$\Pi_{ISD}[u]=\Pi_{ISKD}[\sigma_x,u]\Big|_{under\,[D]}$$

$$=-\frac{E}{2}\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx-\frac{\mathbf{i}k}{2}E\left[u(x_O^+)\right]^2$$

$$+2ikEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)$$

$$=stationary \tag{9.1.11}$$

という変分問題を得る。この変分問題は，完全流体の非回転流れにおける Dirichlet の原理に相当するものであるので，Isshiki-Sommerfeld-Dirichlet 原理と呼ぶことにする。この変分問題の停留条件を求めると

$$0=\delta\Pi_{ISD}=-E\int_0^{x_O^+}\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx}dx+k^2E\int_0^{x_O^+}u\delta u\,dx-\mathbf{i}kEu(x_O^+)\delta u(x_O^+)$$

$$+2\mathbf{i}kEA^{+}e^{\mathbf{i}kx_O^+}\delta u(x_O^+)$$

$$=\int_0^{x_O^+}\left(E\frac{d^2u}{dx^2}+k^2Eu\right)\delta u\,dx+Eu'(0)\delta u(0)$$

$$-[Eu'(x_O^+)+\mathbf{i}kEu(x_O^+)-2\mathbf{i}kEA^{+}e^{ikx_O^+}]\delta u(x_O^+) \tag{9.1.12}$$

となる。したがって，(9.1.11)式の変分問題の自然条件は

$$E\frac{d^2u}{dx^2}+k^2Eu=0 \tag{9.1.13a}$$

$$Eu'(0)=0 \tag{9.1.13b}$$

$$Eu'(x_O^+)=-\mathbf{i}kEu(x_O^+)+2\mathbf{i}kEA^{+}e^{ikx_O^+} \tag{9.1.13c}$$

で与えられる。これらは, Kelvin 条件[K]を使って, σ_x を消去した Dirichlet 条件[D]である。

以上の議論においては，遠方での解の形を Isshiki-Sommerfeld の放射条件(9.1.3c)式の形で考えた。棒の伸び縮み波の場合には局在波がないので遠方境界 $x=x_O^+$ をどこにとってもよいが，局在波のある場合には，遠方境界 $x=x_O^+$ を十分遠方に取らねばならない。これは不便である。局在波を無視しないもっと別の形にする必要がある。そこで，波の放射条件を(9.1.3c）式の代わりに

$$u=A^{+}e^{\mathbf{i}kx}+a_0^{+}e^{-\mathbf{i}kx} \quad at\ x=x_O^+ \tag{9.1.14}$$

と考える。局在波のある場合には，この式の右辺に局在波を表す項が加わる。(9.1.14)式は，x の任意の値に対して成り立つ式であるが，境界条件として使うことを明確にするために $x=x_O^+$ で与えられるものとしている。反射波の振幅を表す a_0^+ が新たに未知数に加わったので，もう一つ条件が要る。そこで，(9.1.14)式を x について微分して求められる

$$\sigma_x=\mathbf{i}kEA^{+}e^{\mathbf{i}kx}-\mathbf{i}kEa_0^{+}e^{-\mathbf{i}kx} \quad at\ x=x_O^+ \tag{9.1.15}$$

を，もう一つの条件と考える。

そこで，(9.1.14)式を $x=x_O^+$ における Kelvin 条件[K]の一つと考え，(9.1.15)式を $x=x_O^+$ における Dirichlet 条件[D]の一つと考える。このような放射条件を，Isshiki の放射条件と呼ぶことにする。

この場合には，棒の運動は境界値問題

Kelvin 条件$[K_1]$：

$$\frac{du}{dx}=\frac{1}{E}\sigma_x \qquad \mathit{for}\ \ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.16a}$$

$$u(x_O^+)=A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.16b}$$

Dirichlet 条件$[D_1]$：

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=-k^2Eu \qquad \mathit{for}\ \ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.17a}$$

$$\sigma_x(0)=0 \tag{9.1.17b}$$

$$\sigma_x(x_O^+)=\mathbf{i}kEA^+e^{ikx_O^+}-\mathbf{i}kEa_0^+e^{-ikx_O^+} \tag{9.1.17c}$$

で記述できる。

この新しい Dirichlet 条件$[D_1]$ の下に，仮想応力変分$\delta\sigma_x$を考えると

$$\begin{aligned}
0&=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}-\frac{1}{E}\sigma_x\right)\delta\sigma_x dx+\left[u(x_O^+)-A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_0^+}\right]\delta\sigma_x\\
&=\frac{1}{E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x\delta\sigma_x dx+\int_0^{x_O^+}u\frac{d\delta\sigma_x}{dx}dx-u(x_O^+)\delta\sigma_x(x_O^+)+u(0)\delta\sigma_x(0)\\
&\quad+u(x_O^+)\delta\sigma_x(x_O^+)+\left[-A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_0^+}\right](-\mathbf{i}kE\delta a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+})\\
&=\frac{1}{E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x\delta\sigma_x dx-k^2E\int_0^{x_O^+}u\delta u dx\\
&\quad+\mathbf{i}kEA^+\delta a_0^++\mathbf{i}kEe^{-2ikx_O^+}a_0^+\delta a_0^+\\
&=\delta\left\{\frac{1}{2E}\int_0^{x_O^+}{\sigma_x}^2dx-\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx+\frac{\mathbf{i}k}{2}E\left[u(x_O^+)\right]^2\right.\\
&\qquad\left.+\frac{\mathbf{i}kE}{2}e^{-2\mathbf{i}kx_O^+}(a_0^+)^2+\mathbf{i}kEA^+a_0^+\right\}
\end{aligned} \tag{9.1.18}$$

を得る。したがって，(9.1.16)式と(9.1.17)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$\Lambda_{IK}[\sigma_x,u,a_0^+]=\frac{1}{2E}\int_0^{x_O^+}{\sigma_x}^2dx-\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx$$

$$+\frac{\mathbf{i}kE}{2}e^{-2\mathbf{i}kx_O^+}(a_0^+)^2+\mathbf{i}kEA^+a_0^+ = stationary$$

$$under\ [D_1] \tag{9.1.19}$$

と等しい。この変分問題は完全流体の非回転流れにおける Kelvin の原理に相当するものであるので，Isshiki-Kelvin の原理と呼ぶことにする。(9.1.18)式より，この変分問題の自然条件は，Kelvin 条件$[K_1]$である。

このことを確かめる。そのために，Lagrange の未定乗数λを導入して，Dirichlet 条件$[D_1]$を緩和する。すなわち，汎関数

$$\begin{aligned}\Lambda'_{IKD}[\sigma_x,u,a_0^+,\lambda] &= \Lambda_{IK}[\sigma_x,u,a_0^+]\\ &+\int_0^{x_O^+}\lambda\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\lambda(0)\sigma_x(0)\\ &-\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)-\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}]\\ &= stationary\end{aligned} \tag{9.1.20}$$

を考える。停留条件を求めると

$$\begin{aligned}0=\delta\Lambda'_{IKD} &= \frac{1}{E}\int_0^{x_O^+}\sigma_x\delta\sigma_x dx-k^2E\int_0^{x_O^+}u\delta u dx\\ &+\mathbf{i}kEe^{-2\mathbf{i}kx_O^+}a_0^+\delta a_0^+ +\mathbf{i}kEA^+\delta a_0^+\\ &+\int_0^{x_O^+}\lambda\left(\frac{d\delta\sigma_x}{dx}+k^2E\delta u\right)dx+\lambda(0)\delta\sigma_x(0)\\ &-\lambda(x_O^+)[\delta\sigma_x(x_O^+)+\mathbf{i}kE\delta a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+})]\\ &+\int_0^{x_O^+}\delta\lambda\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\delta\lambda(0)\sigma_x(0)\\ &-\delta\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)-\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}]\\ &=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{d\lambda}{dx}-\frac{1}{E}\sigma_x\right)\delta\sigma_x dx-k^2E\int_0^{x_O^+}(\lambda-u)\delta u dx\\ &-\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}\left[\lambda(x_O^+)-A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}\right]\delta a_0^+\end{aligned}$$

$$+\int_0^{x_O^+}\delta\lambda\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+k^2Eu\right)dx+\delta\lambda(0)\sigma_x(0)$$

$$-\delta\lambda(x_O^+)[\sigma_x(x_O^+)-\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+\mathbf{i}ka_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}] \tag{9.1.21}$$

であるので，(9.1.20)式の変分問題の自然条件は

Kelvin 条件[K_1*]：

$$\lambda=u \quad for\ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.22a}$$

$$\frac{d\lambda}{dt}=\frac{1}{E}\sigma_x \quad for\ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.22b}$$

$$\lambda(x_O^+)=A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.22c}$$

Dirichlet 条件[D_1]：

$$\frac{d\sigma_x}{dx}=-k^2Eu \quad for\ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.17a}$$

$$\sigma_x(0)=0 \tag{9.1.17b}$$

$$\sigma_x(x_O^+)=\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.17c}$$

である。したがって，(9.1.19)式の変分問題の自然条件は，Kelvin 条件[K_1]であることが分かる。

(9.1.20)式の変分問題を書き直すと

$$\Lambda_{IKD}[\sigma_x,u,a_0^+]=\Lambda'_{IKD}[\sigma_x,u,a_0^+,\lambda]\Big|_{\lambda=u}$$

$$=\Lambda_{IK}[\sigma_x,u,a_0^+]$$

$$+\int_0^{x_O^+}u\left(\frac{d\sigma_x}{dx}+\rho\omega^2u\right)dx+u(0)\sigma_x(0)$$

$$-u(x_O^+)\left[\sigma_x(x_O^+)-\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}\right]$$

$$=-\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}\sigma_x-\frac{1}{2E}{\sigma_x}^2\right)dx+\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx$$

$$-\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)a_0^++\frac{\mathbf{i}kE}{2}e^{-2\mathbf{i}kx_O^+}(a_0^+)^2$$

$$+\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)+\mathbf{i}kEA^+a_0^+$$

$$=stationary \tag{9.1.23}$$

を得る。この変分問題は，弾性学で Hellinger-Reissner の原理と呼ぶものの拡張である。以下では Isshiki-Kelvin-Dirichlet の原理と呼ぶ。

(9.1.23)式の変分問題において，Kelvin 条件$[K_1]$の一つである(9.1.16a)式を拘束すると

$$\Lambda_{ID}[u,a_0^+]=\Lambda_{IKD}[\sigma_x,u,a_0^+]\Big|_{\sigma_x=E\,du/dx}$$

$$=-\frac{E}{2}\int_0^{x_O^+}\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx+\frac{k^2E}{2}\int_0^{x_O^+}u^2dx$$

$$-\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)a_0^+ +\frac{\mathbf{i}kE}{2}e^{-2\mathbf{i}kx_O^+}(a_0^+)^2$$

$$+\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)+\mathbf{i}kEA^+a_0^+$$

$$=stationary \tag{9.1.24}$$

という変分問題を得る。この変分問題は，完全流体の非回転流れにおける Dirichlet の原理に相当するものであるので，Isshiki-Dirichlet 原理と呼ぶことにする。この変分問題の停留条件を求めると

$$0=\delta\Lambda_{ID}=-E\int_0^{x_O^+}\frac{du}{dx}\frac{d\delta u}{dx}dx+k^2E\int_0^{x_O^+}u\delta u dx$$

$$-\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}\delta u(x_O^+)\,a_0^+ -\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}u(x_O^+)\delta a_0^+ +\mathbf{i}kEe^{-2\mathbf{i}kx_O^+}a_0^+\,\delta a_0^+$$

$$+\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}\delta u(x_O^+)+\mathbf{i}kEA^+\delta a_0^+$$

$$=\int_0^{x_O^+}\left(E\frac{d^2u}{dx^2}+k^2Eu\right)\delta u dx$$

$$+Eu'(0)\delta u(0)$$

$$-[Eu'(x_O^+)-\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}]\delta u(x_O^+)$$

$$-\mathbf{i}kEe^{-\mathbf{i}kx_O^+}[u'(x_O^+)-A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+}]\delta a_0^+ \tag{9.1.25}$$

となる。したがって，(9.1.24)式の変分問題の自然条件は

$$E\frac{d^2u}{dx^2}+k^2Eu=0 \tag{9.1.26a}$$

$$Eu'(0)=0 \tag{9.1.26b}$$

$$u(x_O^+)=A^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}+a_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.26c}$$

$$Eu'(x_O^+)=\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}-\mathbf{i}kEa_0^+e^{-\mathbf{i}kx_O^+} \tag{9.1.26d}$$

で与えられる。これらは，(9.1.16a)式を使ってσ_xを消去した Kelvin 条件$[K_1]$の一つである(9.1.16b)式と Dirichlet 条件$[D_1]$である。

(9.1.11)式および(9.1.24)式で与えられる二つの変分問題を用いる数値計算について述べる。境界値問題の正解を

$$Eu=A^+e^{\mathbf{i}kx}+a_0^+e^{-\mathbf{i}kx} \tag{9.1.27}$$

とすると

$$\sigma_x=Eu'=\mathbf{i}kA^+e^{\mathbf{i}kx}-\mathbf{i}ka_0^+e^{-\mathbf{i}kx} \tag{9.1.28}$$

であるから，境界条件

$$0=\sigma_x(0)=\mathbf{i}kA^+-\mathbf{i}ka_0^+ \tag{9.1.29}$$

より

$$a_0^+=A^+ \tag{9.1.30}$$

となる。したがって，正解は

$$Eu=A^+(e^{\mathbf{i}kx}+e^{-\mathbf{i}kx})=2A^+\cos kx=2A^+\left[1-\frac{1}{2!}(kx)^2+\frac{1}{4!}(kx)^4-\cdots\right] \tag{9.1.31}$$

と求まる。

まず, (9.1.11)式で与えられる変分問題の直接法による数値計算について考える。$\alpha_n,\ (n=0,1,\cdots,N-1)$を未知定数として

$$Eu=\sum_{n=0}^{N-1}\alpha_n x^n \qquad for\ \ 0<x<x_O^+ \tag{9.1.32}$$

とおき，これを,（9.1.11）式を少し変形した

$$E\Pi_{ISD}[u]=-\frac{1}{2}\int_0^{x_O^+}\left(\frac{dEu}{dx}\right)^2dx+\frac{k^2}{2}\int_0^{x_O^+}(Eu)^2dx-\frac{\mathbf{i}k}{2}\left[Eu(x_O^+)\right]^2$$
$$+2\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}Eu(x_O^+)$$

$$= stationary \tag{9.1.33}$$

に代入して， $\alpha_n, (n = 0,1,\cdots, N-1)$ に関する多変数関数の停留問題に置き換える。計算結果を以下に示す。N が小さくても, 良い近似が求まっている。

$k = 4.0,\quad N = 6,\quad x_O^+ = 2.0,\quad EA^+ = 1.0$ のとき

No.	x	Re[Eu]	Im[Eu]	$[Eu]_{exact}$
1	0.0000	1.9175	-0.2154	2.0000
2	0.1000	1.7868	-0.2008	1.8421
3	0.2000	1.3265	-0.1490	1.3934
4	0.3000	0.6566	-0.0738	0.7247
5	0.4000	-0.0960	0.0108	-0.0584
6	0.5000	-0.8112	0.0911	-0.8323
7	0.6000	-1.3866	0.1558	-1.4748
8	0.7000	-1.7461	0.1962	-1.8844
9	0.8000	-1.8447	0.2073	-1.9966
10	0.9000	-1.6721	0.1879	-1.7935
11	1.0000	-1.2523	0.1407	-1.3073
12	1.1000	-0.6414	0.0721	-0.6147
13	1.2000	0.0779	-0.0088	0.1750
14	1.3000	0.8040	-0.0903	0.9370
15	1.4000	1.4272	-0.1604	1.5511
16	1.5000	1.8428	-0.2070	1.9203
17	1.6000	1.9673	-0.2210	1.9864
18	1.7000	1.7570	-0.1974	1.7388
19	1.8000	1.2296	-0.1382	1.2167
20	1.9000	0.4878	-0.0548	0.5025

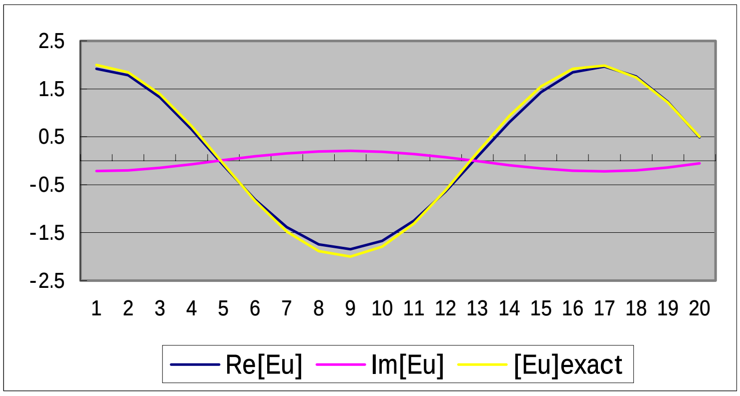

図 9.1.1　近似解 $\mathrm{Re}[Eu]+i\,\mathrm{Im}[Eu]$ と正解 $[Eu]_{exact}$

つぎに, (9.1.24)式で与えられる変分問題の直接法による数値計算について考える。 Eu は, (9.1.32)式の形を考える。これ以外に, a_0^+ を未知数とする。これらを, (9.1.24) 式を少し変形した

$$E\Lambda_{ID}[u,a_0^+]=-\frac{1}{2}\int_0^{x_O^+}\left(\frac{dEu}{dx}\right)^2dx+\frac{k^2}{2}\int_0^{x_O^+}(Eu)^2dx$$

$$-\mathbf{i}ke^{-\mathbf{i}kx_O^+}Eu(x_O^+)Ea_0^+ +\frac{\mathbf{i}k}{2}e^{-2\mathbf{i}kx_O^+}(Ea_0^+)^2$$

$$+\mathbf{i}kEA^+e^{\mathbf{i}kx_O^+}Eu(x_O^+)+\mathbf{i}kEA^+Ea_0^+$$

$$=stationary \qquad (9.1.34)$$

に代入して, $\alpha_n,(n=0,1,\cdots,N-1)$ に関する多変数関数の停留問題に置き換える。計算結果を以下に示す。N が小さくても, 良い近似が求まっている。(9.1.33)式よりも, (9.1.34)式による方がはるかに精度の高い近時解が得られる。

$k=4.0,\quad N=6,\quad x_O^+=2.0,\quad EA^+=1.0$ のとき

$\mathrm{Re}[Ea_0^+]=0.9996,\quad \mathrm{Im}[Ea_0^+]=0.0298$

No.	x	$\mathrm{Re}[Eu]$	$\mathrm{Im}[Eu]$	$[Eu]_{exact}$
1	0.0000	1.9782	0.0294	2.0000
2	0.1000	1.8434	0.0274	1.8421
3	0.2000	1.3685	0.0204	1.3934
4	0.3000	0.6774	0.0101	0.7247

5	0.4000	-0.0990	-0.0015	-0.0584
6	0.5000	-0.8368	-0.0125	-0.8323
7	0.6000	-1.4305	-0.0213	-1.4748
8	0.7000	-1.8014	-0.0268	-1.8844
9	0.8000	-1.9031	-0.0283	-1.9966
10	0.9000	-1.7251	-0.0257	-1.7935
11	1.0000	-1.2920	-0.0192	-1.3073
12	1.1000	-0.6617	-0.0098	-0.6147
13	1.2000	0.0804	0.0012	0.1750
14	1.3000	0.8295	0.0123	0.9370
15	1.4000	1.4724	0.0219	1.5511
16	1.5000	1.9011	0.0283	1.9203
17	1.6000	2.0296	0.0302	1.9864
18	1.7000	1.8127	0.0270	1.7388
19	1.8000	1.2685	0.0189	1.2167
20	1.9000	0.5032	0.0075	0.5025

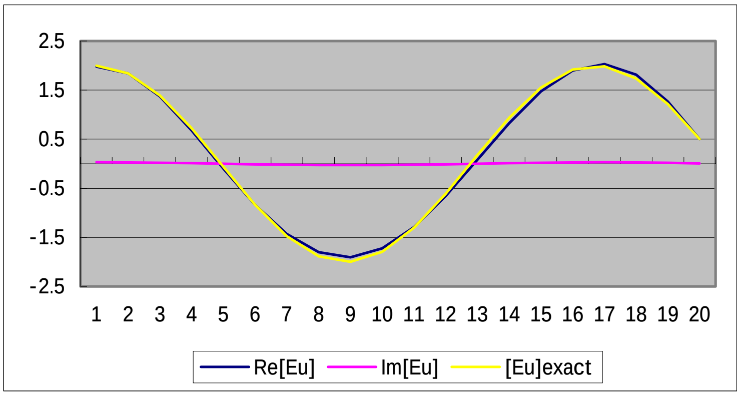

図 9.1.2　近似解 $\mathrm{Re}[Eu]+i\,\mathrm{Im}[Eu]$ と正解 $[Eu]_{exact}$