§8.5　修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1

(8.4.4)式で与えられる Hamilton-Dirichlet の原理において, 水に関する自然条件$[K_{water}^{*1}]$，すなわち(8.4.5)式を拘束すると

$$
\begin{aligned}
&\Pi_{HD}^{*1}[w,\phi]=\Pi_{HD}[w,\phi]_{under\ \ [K_{water}^{*1}]}\\
&\quad=-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2dxdy\\
&\quad+\frac{D}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\\
&\quad+\frac{\rho g}{2}\iint_R w^2dxdy\\
&\quad+\frac{i\omega\rho}{2}\iint_R \phi w\,dxdy\\
&\quad+\frac{\rho}{2}\iint_{S_O}\bar{f}_O\phi\,dS\\
&\quad=stationary\\
&under\quad[K_{plate}]+[K_{water}^{*1}]
\end{aligned}
\tag{8.5.1}
$$

を得る。

実際に，$\delta\Pi_{HD}^{*1}=0$を求めると

$$
\begin{aligned}
&0=\delta\Pi_{HD}^{*1}\\
&\quad=\delta\left[\begin{aligned}&-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2dxdy\\&+\frac{D}{2}\iint_R\left[\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\\&+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\end{aligned}\right]dxdy\\&+\frac{\rho g}{2}\iint_R w^2dxdy\end{aligned}\right]\\
&\quad+\frac{i\omega\rho}{2}\iint_R(\delta\phi\ w+\phi\,\delta w)\,dxdy
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\rho}{2}\iint_{S_O}\bar{f}_O\,\delta\phi\,dS \qquad (8.5.2)$$

となる。一方

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\right)dxdy$$

$$=\iiint_\Omega\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}\right)\delta\phi\,dxdy$$

$$+\iint_R\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta\phi\,dxdy+\iint_{S_F}\frac{\partial\phi}{\partial z}\delta\phi\,dxdy+\iint_{S_B}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\,dxdy+\iint_{S_O}\frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi\,dS$$

$$=i\omega\iint_R w\delta\phi\,dxdy+\frac{\omega^2}{g}\iint_{S_F}\phi\,\delta\phi\,dxdy+\iint_{S_O}\bar{f}_O\delta\phi\,dS \qquad (8.5.3a)$$

$$\iiint_\Omega\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)dxdy$$

$$=i\omega\iint_R\delta w\phi\,dxdy+\frac{\omega^2}{g}\iint_{S_F}\delta\phi\,\phi\,dxdy \qquad (8.5.3b)$$

という関係があるので，この両式の引き算を行うと

$$i\omega\iint_R w\delta\phi\,dxdy=i\omega\iint_R\delta w\phi\,dxdy-\iint_{S_F}\bar{f}_O\delta\phi\,dxdy \qquad (8.5.4)$$

となる。(8.5.4)式を（8.5.2)式に代入すると

$$0=\delta\Pi_{HD}^{*1}$$

$$=\delta\begin{bmatrix}-\dfrac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2dxdy\\ +\dfrac{D}{2}\iint_R\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\\ +2(1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\end{bmatrix}dxdy\\ +\dfrac{\rho g}{2}\iint_R w^2dxdy\end{bmatrix}$$

$$+i\omega\rho\iint_R\phi\,\delta w\,dxdy \qquad (8.5.5)$$

が求まる。(8.4.3)式より，（8.5.5）式の自然条件は(8.3.1)式で与えられる板の力学的条件$[M_{plate}]$に外ならない。

永田外[8.4, 5,6]および大松[8.7]は，水運動に関しては領域分割法と境界要素法を用いて解き，板の運動に関しては，(8.5.5)式で与えられる変分問題に，ﾌﾘｰ･ﾌﾘｰ･ﾊﾞｰの固有関数の未知係数を含む積和として得られる関数を考え, それを試験関数として Ritz 法を適用して解く数値計算法を開発している。