§8.4　水面に浮かぶ板の運動に関する Hamilton-Dirichlet の原理[8.1,2]

水に関する変数を変換して, 水に関しては, 力学的条件を拘束条件とし, 運動学的条件を自然条件とする変分問題に変換する。すなわち, Kelvin の原理から Dirichlet の原理に変換する。そこで, (8.3.4)式の変分問題において, Lagrange の未定定数ϕを導入して, 水に関する運動学的条件$[K_{water}]$を緩和する。

$$
\begin{aligned}
\Pi_{HKD}[w,\mathbf{u}_f,\eta,\phi] = &-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2 dxdy \\
&+\frac{D}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + 2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&+\frac{\rho g}{2}\iint_R w^2 dxdy \\
&+\frac{\rho}{2}\iiint_\Omega (u_f{}^2 + v_f{}^2 + w_f{}^2)dxdydz \\
&+\frac{\rho g}{2}\iint_{S_F}\eta^2 dxdy \\
&+\rho\iiint_\Omega \phi\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}+\frac{\partial v_f}{\partial y}+\frac{\partial w_f}{\partial z}\right)dxdydz \\
&-\rho\iint_R \phi(w_f - i\omega w)dxdy \\
&-\rho\iint_{S_F}\phi(w_f - i\omega\eta)dxdy \\
&-\rho\iint_{S_B}\phi(u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z)dS \\
&-\rho\iint_{S_O}\phi(u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z - \bar{f}_O)dS \\
&= stationary \\
&under\quad [K_{plate}]
\end{aligned}
\tag{8.4.1}
$$

汎関数Π_{HKD}の変分をとると

$$0 = \delta\Pi_{HKD}$$

$$
= \delta \left\{ \begin{array}{l} -\dfrac{\omega^2}{2} \iint_R m w^2 dxdy \\ + \dfrac{D}{2} \iint_R \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 \\ + 2(1-\nu) \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \end{array} \right] dxdy \\ + \dfrac{\rho g}{2} \iint_R w^2 dxdy \end{array} \right\}
$$

$$
+ \rho \iiint_\Omega (u_f \delta u_f + v_f \delta v_f + w_f \delta w_f)\, dxdydz
$$

$$
+ \rho g \iint_{S_F} \eta\, \delta\eta\, dxdy
$$

$$
+ \rho \iiint_\Omega \phi \left(\frac{\partial \delta u_f}{\partial x} + \frac{\partial \delta v_f}{\partial y} + \frac{\partial \delta w_f}{\partial z} \right) dxdydz
$$

$$
- \rho \iint_R \phi (\delta w_f - i\omega\, \delta w)\, dxdy
$$

$$
- \rho \iint_{S_F} \phi (\delta w_f - i\omega\, \delta\eta)\, dxdy
$$

$$
- \rho \iint_{S_B} \phi (\delta u_f n_x + \delta v_f n_y + \delta w_f n_z)\, dS
$$

$$
- \rho \iint_{S_O} \phi (\delta u_f n_x + \delta v_f n_y + \delta w_f n_z)\, dS
$$

$$
+ \rho \iiint_\Omega \delta\phi \left(\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} \right) dxdydz
$$

$$
- \rho \iint_R \delta\phi (w_f - i\omega w)\, dxdy
$$

$$
- \rho \iint_{S_F} \delta\phi (w_f - i\omega \eta)\, dxdy
$$

$$
- \rho \iint_{S_B} \delta\phi (u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z)\, dS
$$

$$
- \rho \iint_{S_O} \delta\phi (u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z - \bar{f}_O)\, dS
$$

$$
=\delta\left\{\begin{array}{l}
-\dfrac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2dxdy \\
+\dfrac{D}{2}\iint_R\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \\ +2(1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\end{array}\right]dxdy \\
+\dfrac{\rho g}{2}\iint_R w^2dxdy
\end{array}\right\}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\rho\iint_R i\omega\phi\,\delta w\,dxdy \\
&+\rho\iiint_\Omega\left[\left(u_f-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta u_f+\left(v_f-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\delta v_f+\left(w_f-\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\delta w_f\right]dxdydz \\
&+\rho g\iint_{S_F}\left(\eta+\frac{i\omega}{g}\phi\right)\delta\eta\,dxdy \\
&+\rho\iiint_\Omega\delta\phi\left(\frac{\partial u_f}{\partial x}+\frac{\partial v_f}{\partial y}+\frac{\partial w_f}{\partial z}\right)dxdydz \\
&-\rho\iint_R\delta\phi(w_f-i\omega w)dxdy \\
&-\rho\iint_{S_F}\delta\phi(w_f-i\omega\eta)dxdy \\
&-\rho\iint_{S_B}\delta\phi(u_f n_x+v_f n_y+w_f n_z)dS \\
&-\rho\iint_{S_O}\delta\phi(u_f n_x+v_f n_y+w_f n_z-\bar{f}_O)dS \qquad (8.4.2)
\end{aligned}
$$

となる。一方

$$
\delta\left\{\begin{aligned}
&-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2 dxdy\\
&+\frac{D}{2}\iint_R\left[\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2\\&+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\end{aligned}\right]dxdy\\
&+\frac{\rho g}{2}\iint_R w^2 dxdy
\end{aligned}\right\}_{under\ [K_{plate}]}
$$

$$
\begin{aligned}
&=-\iint_R\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+m\omega^2 w-\rho g w\right)\delta w\,dxdy\\
&\quad+\sum_{i=1}^{N}\int_{\Gamma_i}\left[-M_n\frac{\partial\delta w}{\partial n}+\left(Q_n+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\delta w\right]ds\\
&\quad-\sum_{i=1}^{N}[M_{ns}\delta w]_{P_{i+}}+\sum_{i=1}^{N}[M_{ns}\delta w]_{P_{i-}}
\end{aligned}
\tag{8.4.3}
$$

であるので，変分問題（8.4.1）式の自然条件は，$[M_{plate}]+[M_{water}]+[K_{water}]$である。

（8.4.1）式の変分問題において，$[M_{water}]$すなわち，(8.3.1g)式と(8.3.1h)式を拘束すると

$$
\begin{aligned}
\Pi_{HD}[w,\phi]&=\Pi_{HKD}[w,\mathbf{u}_f,\eta,\phi]_{under\ \ [M_{water}]}\\
&=-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2 dxdy\\
&\quad+\frac{D}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy\\
&\quad+\frac{\rho g}{2}\iint_R w^2 dxdy\\
&\quad-\frac{\rho}{2}\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dxdydz\\
&\quad+i\omega\rho\iint_R\phi w\,dxdy
\end{aligned}
$$

$$
+\frac{\rho\omega^2}{2g}\iint_{S_F}\phi^2 dxdy
$$

$$
+\rho\iint_{S_O}\bar{f}_O\phi\, dS
$$

$$
= stationary
$$

$$
under \quad [K_{plate}]+[M_{water}]
$$

(8.4.4)

が求まる。ただし，$[M_{water}]$は直接表に現れないので，省略してもよい。この変分問題の自然条件は, $[M_{plate}]+[K_{water}]$である。この変分問題のことを, Hamilton-Dirichlet の原理と呼ぶことにする。

$\delta\Pi_{HD}=0$ より得られる水に関する自然条件を改めて記すと

$$
\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \quad in\ \Omega \tag{8.4.5a}
$$

$$
\frac{\partial\phi}{\partial z}=i\omega w \quad on\ R \tag{8.4.5b}
$$

$$
\frac{\partial\phi}{\partial z}=\frac{\omega^2}{g}\phi \quad on\ S_F \tag{8.4.5c}
$$

$$
\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \quad on\ S_B \tag{8.4.5d}
$$

$$
\frac{\partial\phi}{\partial n}=\bar{f}_O \quad on\ S_O \tag{8.4.5e}
$$

となる。この条件を$[K^{*1}_{water}]$と書くことにする。

岡本外[8.3]は，このﾀｲﾌﾟの変分原理を用いて，水部分に有限要素法を適用した数値計算法を開発している。