§8.2　流体の運動に関する Kelvin の原理

図 8.2.1 に座標系$O(x,y,z)$その他を示す。水の存在する領域をΩとし，物体表面，自由表面，水底，外部境界を，それぞれS_H, S_F, S_B, S_Oとする。水の速度ﾍﾞｸﾄﾙを$\mathbf{u}_f = (u_f, v_f, w_f)$，速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを$\phi$，自由表面の変位を$\eta$で表す。

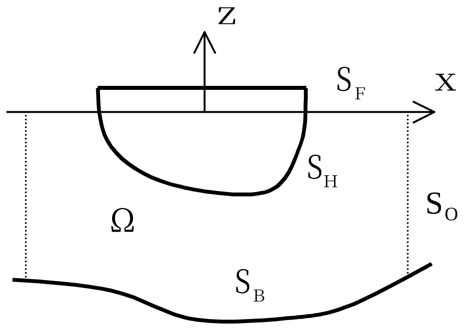

図 8.2.1　流体の運動

水の運動は，以下の（8.2.1)式と（8.2.2)式で記述される。
力学的条件$[M]$：

$$u_f = \frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v_f = \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w_f = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad in\ \Omega \tag{8.2.1a}$$

$$\frac{g}{i\omega}\eta = -\phi \quad on\ S_F \tag{8.2.1b}$$

運動学的条件$[K]$

$$\frac{\partial u_f}{\partial x} + \frac{\partial v_f}{\partial y} + \frac{\partial w_f}{\partial z} = 0 \quad in\ \Omega \tag{8.2.2a}$$

$$u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z = \bar{f}_H \quad on\ S_H \tag{8.2.2b}$$

$$w_f = i\omega\eta \quad on\ S_F \tag{8.2.2c}$$

$$u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z = 0 \quad on\ S_B \tag{8.2.2d}$$

$$u_f n_x + v_f n_y + w_f n_z = \bar{f}_O \quad on\ S_O \tag{8.2.2e}$$

運動学的条件$[K]$の下に，仮想速度$\delta u_f, \delta v_f, \delta w_f$および仮想変位$\delta\eta$を考えると

$$0 = \iiint_\Omega \left[\left(u_f - \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)\delta u_f + \left(v_f - \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)\delta v_f + \left(w_f - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)\delta w_f \right] dxdydz$$

$$+\iint_{S_F}\left(\frac{g}{i\omega}\eta+\phi\right)\delta w_f\,dxdy$$

$$=\iiint_{\Omega}(u_f\delta u_f+v_f\delta v_f+w_f\delta w_f)dxdydz$$

$$-\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi\,\delta u_f}{\partial x}+\frac{\partial\phi\,\delta v_f}{\partial y}+\frac{\partial\phi\,\delta w_f}{\partial z}\right)-\phi\left(\frac{\partial\delta u_f}{\partial x}+\frac{\partial\delta v_f}{\partial y}+\frac{\partial\delta w_f}{\partial z}\right)\right]dxdydz$$

$$+\iint_{S_F}\left(\frac{g}{i\omega}\eta+\phi\right)\delta w_f\,dxdy$$

$$=\delta\left[\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(u_f{}^2+v_f{}^2+w_f{}^2)\,dxdydz\right]+\frac{g}{i\omega}\iint_{S_F}\eta\,\delta w_f\,dxdy$$

$$=\delta\left[\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(u_f{}^2+v_f{}^2+w_f{}^2)dxdydz+\frac{g}{2}\iint_{S_F}\eta^2\,dxdy\right] \tag{8.2.3}$$

したがって，（8.2.1)式と（8.2.2)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$\Pi_K[\vec{u}_f,\eta]=\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}(u_f{}^2+v_f{}^2+w_f{}^2)dxdydz+\frac{g}{2}\iint_{S_F}\eta^2\,dxdy$$

$$=stationary$$

$$under\quad [K]$$

（8.2.4)

と等しい。この変分問題は，Kelvin の原理の拡張であるので，以下では Kelvin の原理と呼ぶ。(8.2.3)式より，この変分問題の自然条件は，力学的条件$[M]$である。