§8. 水面に浮かぶ弾性板の運動に関する変分原理

水面に浮かぶ弾性板の運動に関する変分原理をいくつか導き，その相互関係を整理して述べる。波浪中の浮体の運動に関する変分原理が，文献[8.1,2]に述べられている。また，その応用として，岡本外[8.3]による数値計算がある。最近，超大型浮体の波浪中運動計算において，水面に浮かぶ弾性平板の運動に関する変分原理が，永田外[8.4,5,6]および大松[8.7]により数値計算に用いら，その有効性が確認されている。

水面に浮かぶ弾性平板の運動について, 板の運動に関する Hamilton の原理, 水の運動に関する Kelvin の原理から出発して, いくつかの変分原理を導くことができる。それらの相互関係は，図 8.1 にまとめられている。

Hamilton の原理 Π_H も Kelvin の原理 Π_K も共に，運動学的条件[K]が拘束条件で，力学的条件[M]が自然条件となっている。これらを結合したものが Hamilton-Kelvin の原理 Π_{HK} で, 水に浮かんだ弾性板に関する変分原理の一つである。水運動に関しては, 一般に速度ﾍﾞｸﾄﾙ $\mathbf{u}_f$ で考えるよりも, 速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ ϕ で考える方が解き易い。そこで，$\mathbf{u}_f$ から ϕ に変数を変換すると，Hamilton-Dirichlet の原理 Π_{HD} が得られる。さらに，何らかの方法で水部分の解が求められるならば，それを前提として考えると，修正された Hamilton-Dirichlet の原理 1 Π_{HD}^{*1} となる。また，板と水との運動学的条件を用いて，板のたわみ w を消去すると，修正された Hamilton-Dirichlet の原理 2 Π_{HD}^{*2} が得られる。

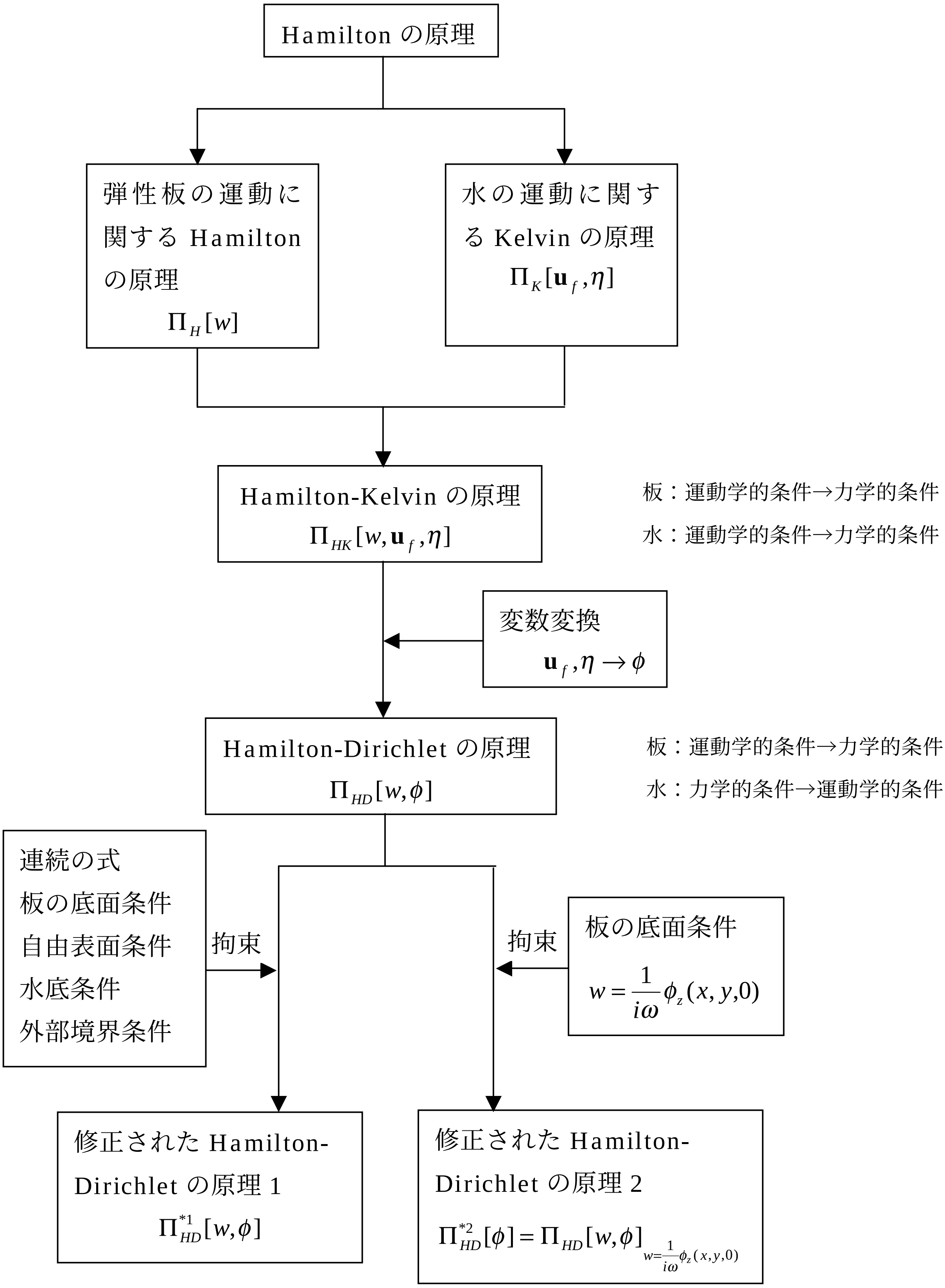

図 8.1.1　変分原理間の相互関係

§8.1　板の曲げに関する Hamilton の原理[8.10, 11]

図 8.1.1 に座標系$O(x,y,z)$その他を示す。板をR，Rの境界Γの内で力学的条件$[M]$の与えられる境界をΓ_M，運動学的条件$[K]$の与えられる境界をΓ_Kとする。Γの外向き法線をn，Γに沿って測った長さをsとし，Γ_MとΓ_Kの交点を$P_\pm$とする。

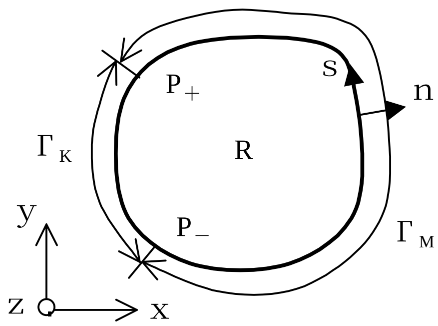

図 8.1.1　板の曲げ

板は，時間をtとして，時間項が$e^{i\omega t}$で与えられる正弦運動をしているものとする。以後，時間項$e^{i\omega t}$は省略して振幅部分(空間部分)のみを考える。板の単位面積あたりの質量をm，曲げ剛性をD，ﾎﾟｱｿﾝ比をνとし，板に加わる垂直荷重をqとする。さらに，板のたわみをw，曲げﾓｰﾒﾝﾄをM，剪断力をQで表す。記号の上に横棒が付されているものは，値が指定されることを示す。$\overline{F}_\pm$は，$P_\pm$で与えられる集中力を表す。

板の運動は，以下の（8.1.1)式と（8.1.2)式で与えられる。

力学的条件$[M]$：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}+m\omega^2 w+q=0 \quad in\ R \tag{8.1.1a}$$

$$M_n=\overline{M}_n \quad on\ \Gamma_M \tag{8.1.1b}$$

$$Q_n+\frac{\partial M_{ns}}{\partial s}=\overline{Q}_n \quad on\ \Gamma_M \tag{8.1.1c}$$

$$M_{ns}=\overline{F}_\pm \quad at\ P_\pm \tag{8.1.1d}$$

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad in\ R \tag{8.1.1e}$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad in\ R \tag{8.1.1f}$$

運動学的条件$[K]$：

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad in\ R \tag{8.1.2a}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \quad in\ R \tag{8.1.2b}$$

$$M_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad in\ R \tag{8.1.2c}$$

$$w = \overline{w} \quad on\ \Gamma_K \tag{8.1.2d}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} \quad on\ \Gamma_K \tag{8.1.2e}$$

力学的条件の内，（8.1.1e)式と（8.1.1f)式は補助的な条件で，単にQ_x，Q_yの定義を与えているに過ぎない。

運動学的条件$[K]$の下に，仮想変位δwを考えると

$$\begin{aligned}
0 = &-\iint_R \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m\omega^2 w + q\right)\delta w\, dxdy \\
&+ \int_{\Gamma_M} \left[-(M_n - \overline{M}_n)\frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \overline{Q}_n\right)\delta w\right] ds \\
&- \left[(M_{ns} - \overline{F}_+)\delta w\right]_{P_+} + \left[(M_{ns} - \overline{F}_-)\delta w\right]_{P_-} \\
= &-\omega^2 \iint_R m w \delta w\, dxdy - \iint_R q\,\delta w\, dxdy \\
&- \iint_R \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial M_x}{\partial x}\delta w\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x}\delta w\right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}\delta w\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial M_y}{\partial y}\delta w\right) \\ -\dfrac{\partial M_x}{\partial x}\dfrac{\partial \delta w}{\partial x} - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial x}\dfrac{\partial \delta w}{\partial y} - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y}\dfrac{\partial \delta w}{\partial x} - \dfrac{\partial M_y}{\partial y}\dfrac{\partial \delta w}{\partial y} \end{array}\right] dxdy \\
&+ \int_{\Gamma_M} \left[-(M_n - \overline{M}_n)\frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \overline{Q}_n\right)\delta w\right] ds \\
&- \left[(M_{ns} - \overline{F}_+)\delta w\right]_{P_+} + \left[(M_{ns} - \overline{F}_-)\delta w\right]_{P_-}
\end{aligned}$$

$$= -\omega^2 \iint_R m w \delta w\, dxdy - \iint_R q\, \delta w\, dxdy$$

$$- \int_{\Gamma_M} \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) n_x + \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) n_y \right] \delta w\, ds$$

$$+ \iint_R \left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(M_x \dfrac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial}{\partial x}\left(M_{xy} \dfrac{\partial \delta w}{\partial y} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(M_{xy} \dfrac{\partial \delta w}{\partial x} \right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(M_y \dfrac{\partial \delta w}{\partial y} \right) \\ - M_x \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} - 2 M_{xy} \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} - M_y \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \end{array} \right] dxdy$$

$$+ \int_{\Gamma_M} \left[-(M_n - \overline{M}_n) \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \overline{Q}_n \right) \delta w \right] ds$$

$$- \left[(M_{ns} - \overline{F}_+) \delta w \right]_{P_+} + \left[(M_{ns} - \overline{F}_-) \delta w \right]_{P_-}$$

$$= -\omega^2 \iint_R m w \delta w\, dxdy - \iint_R q\, \delta w\, dxdy$$

$$- \int_{\Gamma_M} (Q_x n_x + Q_y n_y) \delta w\, ds$$

$$+ \int_{\Gamma_M} \left(M_x n_x \frac{\partial \delta w}{\partial x} + M_{xy} n_x \frac{\partial \delta w}{\partial y} + M_{xy} n_y \frac{\partial \delta w}{\partial x} + M_y n_y \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) ds$$

$$+ \iint_R \left[\begin{array}{l} D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + 2(1-\nu) D \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} \\ + D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \dfrac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} \end{array} \right] dxdy$$

$$+ \int_{\Gamma_M} \left[-(M_n - \overline{M}_n) \frac{\partial \delta w}{\partial n} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} - \overline{Q}_n \right) \delta w \right] ds$$

$$- \left[(M_{ns} - \overline{F}_+) \delta w \right]_{P_+} + \left[(M_{ns} - \overline{F}_-) \delta w \right]_{P_-}$$

$$
=\delta\left\{\begin{array}{l}
\qquad -\dfrac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2\,dxdy \\
\qquad +\dfrac{D}{2}\iint_R\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 \\ +2(1-\nu)\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\end{array}\right]dxdy \\
-\iint_R qw\,dxdy-\int_{\Gamma_M}\left(-\overline{M}_n\dfrac{\partial w}{\partial n}+\overline{Q}_n w\right)ds+\overline{F}_+w_+-\overline{F}_-w_-
\end{array}\right\}
$$

(8.1.3)

となる。

したがって，(8.1.1)式と（8.1.2)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$
\begin{aligned}
\Pi_H[w]=&-\frac{\omega^2}{2}\iint_R mw^2\,dxdy \\
&+\frac{D}{2}\iint_R\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+2\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right]dxdy \\
&-\iint_R qw\,dxdy-\int_{\Gamma_M}\left(-\overline{M}_n\frac{\partial w}{\partial n}+\overline{Q}_n w\right)ds+\overline{F}_+w_+-\overline{F}_-w_- \\
&= stationary
\end{aligned}
$$

$under\ \ [K]$

(8.1.4)

と等しい。この変分問題は，Hamilton の原理に外ならない。(8.1.3)式より，この変分問題の自然条件は，力学的条件$[M]$である。