§7.4　Hamilton-Jacobi の理論の測地線への応用

線素 ds が

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(\mathbf{q})dq_i dq_j, \quad g_{ij} = g_{ji} \tag{7.4.1}$$

で与えられる Riemann 空間 R_N を考えよう。R_N の 2 点 $P_0(\mathbf{q}_0) = P_0(q_{00}, q_{01}, \cdots, q_{0N})$ と $P_1(\mathbf{q}_1) = P_1(q_{10}, q_{11}, \cdots, q_{1N})$ を結ぶ測地線

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(t), \quad 0 < t < 1 \tag{7.4.2a}$$

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1, \tag{7.4.2b}$$

とは，最小値問題

$$J[\mathbf{q}] = \int_0^1 Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})^{1/2} dt = \min \tag{7.4.3a}$$

under

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1, \tag{7.4.3b}$$

の解である。ここで

$$Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_i \dot{q}_j \tag{7.4.4}$$

とする。

(7.4.3)式で与えられる最小値問題の Euler の方程式は

$$\frac{d}{dt}(Q^{-1/2}Q_{\dot{\mathbf{q}}}) = Q^{-1/2}Q_{\mathbf{q}} \tag{7.4.5a}$$

or

$$\frac{d}{dt}(Q^{-1/2}Q_{\dot{q}_i}) = Q^{-1/2}Q_{q_i}, \quad (i = 1, 2, \cdots, N) \tag{7.4.5b}$$

である。$Q^{-1/2}$ の項があるので，残念ながら(7.4.3)式で与えられる変分問題は正則でない。

ﾊﾟﾗﾒｰﾀ t には任意性があるので，t の選び方として，停留曲線上の固定点 $P_0(\mathbf{q}_0)$ と動点 $P(\mathbf{q})$ を結ぶ弧の長さ P_0P の全長 $P_0P_1 = l$ との比を t の値とすると

$$ds = Q^{1/2}dt = l\,dt \tag{7.4.6}$$

であるから

$$Q^{1/2} = l \tag{7.4.7}$$

となる。これを，(7.4.5)式に代入すると

$$\frac{d}{dt}Q_{\dot{\mathbf{q}}} = Q_{\mathbf{q}}, \quad 0 < t < 1 \tag{7.4.8}$$

を得る。これより，(7.4.3)式の最小値問題の解，すなわち停留曲線は，正則な最小値問題

$$I[\mathbf{q}] = \frac{1}{2}\int_0^1 Q(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,dt = \min \tag{7.4.9a}$$

under

$$\mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \quad \mathbf{q}(1) = \mathbf{q}_1, \tag{7.4.9b}$$

の解であることが分かる。

(7.4.9)式で与えられる最小値問題の解、すなわち(7.4.8)式を満たす解，すなわち停留曲線が(7.4.7)式を満たしていないと矛盾するが，このことは以下のようにして証明される。(7.4.4)式より，Qは$\dot{\mathbf{q}}$の 2 次の同次式であるから

$$\dot{\mathbf{q}}Q_{\dot{\mathbf{q}}} = 2Q \tag{7.4.10}$$

がいえる。この式の両辺をtで微分すると

$$\ddot{\mathbf{q}}Q_{\dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}\frac{dQ_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt} = 2\frac{dQ}{dt} \tag{7.4.11}$$

となるが，(7.4.8)式を代入すると

$$\ddot{\mathbf{q}}Q_{\dot{\mathbf{q}}} + \dot{\mathbf{q}}Q_{\mathbf{q}} = 2\frac{dQ}{dt} \tag{7.4.12}$$

を得る。この式の左辺はdQ/dtに外ならない。したがって

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \quad or \quad Q = const \tag{7.4.13}$$

が成り立つ。一方，全長lの定義より

$$l = \int_0^1 Q^{1/2}dt = Q^{1/2} \tag{7.4.14}$$

であるので，(7.4.7)式が言える。

$J[\mathbf{q}]$と$I[\mathbf{q}]$は同じ停留関数を持ち，停留関数を$\mathbf{q}$とすると停留値の間には

$$j[\mathbf{q}] = l \tag{7.4.15a}$$

$$I[\mathbf{q}] = \frac{1}{2}l^2 = \frac{1}{2}\left(J[\mathbf{q}]\right)^2 \tag{7.4.15b}$$

の関係がある。いま，ﾊﾟﾗﾒｰﾀtを$0 \le t \le 1$としている。(7.4.15a)式はﾊﾟﾗﾒｰﾀtの取り方に関係なく成り立つが, (7.4.15b)式はﾊﾟﾗﾒｰﾀtの取り方に依存する。もし，ﾊﾟﾗﾒｰﾀtを$t_0 \le t \le t_1$とすると

$$ds = Q^{1/2} dt = l \frac{dt}{t_1 - t_0} \tag{7.4.16}$$

であるから

$$Q^{1/2} = \frac{l}{t_1 - t_0} \tag{7.4.17}$$

となる。これを，(7.4.9a)式に代入すると

$$I[\mathbf{q}] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\, dt = \frac{1}{2}\frac{l^2}{t_1 - t_0} = \frac{1}{2}\frac{J[\mathbf{q}]^2}{t_1 - t_0} \tag{7.4.18}$$

となる。

N次元ﾕｰｸﾘｯﾄﾞ(Euclid)空間では

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ij}(\mathbf{q})\, dq_i dq_j = \sum_{i=1}^{N} dq_i{}^2 = (d\mathbf{q})^2 \tag{7.4.19}$$

であるから，（7.4.4）式から

$$Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \delta_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_j = \sum_{i=1}^{N} \dot{q}_i{}^2 = \dot{\mathbf{q}}^2 \tag{7.4.20}$$

となる。したがって，測地線の満たすべき方程式は，(7.4.8)式より

$$\ddot{\mathbf{q}} = 0, \quad t_0 < t < t_1 \tag{7.4.21}$$

であるので，測地線は$\mathbf{q}_0$と$\mathbf{q}_1$を結ぶ直線

$$\mathbf{q} = \frac{\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0}{t_1 - t_0}(t - t_0) + \mathbf{q}_0, \quad t_0 < t < t_1 \tag{7.4.22}$$

で与えられる。このとき，(7.4.18)式から測地線の長さは

$$J[\mathbf{q}]^2 = 2(t_1 - t_0) I[\mathbf{q}] = (t_1 - t_0)\int_{t_0}^{t_1} Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\, dt = (\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_0)^2 \tag{7.4.23}$$

というよく知られた結果になる。

つぎに，Hamilton-Jacobi の理論を適用してみよう。(7.4.9a)式の汎関数の被積分関数

$$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} Q(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} g_{ij}(\mathbf{q})\, \dot{q}_i \dot{q}_j \tag{7.4.24}$$

に，(7.3.4)式で与えられる Legendre 変換を適用すると

$$p_i = L_{\dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{N} g_{ij}(\mathbf{q})\dot{q}_j, \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{7.4.25}$$

となる。ここで

$$[h_{ij}] = [g_{ij}]^{-1} \tag{7.4.26a}$$

or

$$\sum_{k=1}^{N} h_{ik} g_{kj} = \delta_{ij}, \quad (i, j = 1,2,\cdots,N) \tag{7.4.26b}$$

とすると，(7.4.25)式を $\dot{q}_i$ について

$$\dot{q}_i = \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\, p_j, \quad (i = 1,2,\cdots,N) \tag{7.4.27}$$

と解くことができる。したがって，(7.3.4b)式より Hamilton 関数 $H(\mathbf{q},\mathbf{p})$ が

$$\begin{aligned} H(\mathbf{q},\mathbf{p}) &= \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) \\ &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} g_{ij}\left(\sum_{k=1}^{N} h_{ik}(\mathbf{q})\, p_k\right)\left(\sum_{l=1}^{N} h_{jl}(\mathbf{q})\, p_l\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\, p_i p_j \end{aligned} \tag{7.4.28}$$

と求まる。

これより，正準方程式は(7.3.7)式より

$$\dot{q}_i = H_{p_i} = \sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\, p_j \tag{7.4.29a}$$

$$\dot{p}_i = -H_{q_i} = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial h_{ij}(\mathbf{q})}{\partial q_i}\, p_i p_j \tag{7.4.29b}$$

で与えられる。Hamilton-Jacobi の方程式は，(7.3.10)式より

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial W}{\partial q_i}\frac{\partial W}{\partial q_j} = 0 \tag{7.4.30}$$

となる。

(7.4.30)式は，t を陽に含まないので，変数分離解

$$W = \alpha_1^{1/2} V(\mathbf{q}) - \frac{1}{2}\alpha_1 t \tag{7.4.31}$$

が可能である。これを，(7.4.30)式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j} = 1 \tag{7.4.32}$$

が得られる。この微分方程式の解で$N-1$個のﾊﾟﾗﾒｰﾀ$\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_N$を含むものが求まれば，(7.4.31)により，$N$個のﾊﾟﾗﾒｰﾀ$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\cdots,\alpha_N$を含む(7.4.30)式で与えられるHamilton-Jacobiの方程式の完全解が求まったことになるので，(7.3.19)式により測地線の方程式が得られる。このうち，$k=2,3,\cdots,N$に対するものはtを含まないので，それだけで測地線の方程式になっている。(7.4.31)式をα_i $(i=2,3,\cdots N)$で微分すると，(7.3.19)式より

$$\frac{\partial W}{\partial\alpha_i}=\alpha_1^{1/2}\frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial\alpha_i}=\beta_i \quad or \quad \frac{\partial V(\mathbf{q})}{\partial\alpha_i}=\alpha_1^{-1/2}\beta_i \tag{7.4.33}$$

であるので，$\alpha_i^{1/2}\beta_i=\beta_i'$とすると，この測地線は$\alpha_i,\beta_i'$ $(i=2,3,\cdots N)$の$N-2$個の任意定数を含むことになる。

特に，定点P_0を通る停留曲線に沿ってQを積分して得られるHamiltonの主関数を$U(t,\mathbf{q})$とすると，(7.4.18)式によって

$$U=\frac{1}{2}\frac{R(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)}{(t-t_0)} \tag{7.4.34}$$

である。ここで，$R(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)$は点$\mathbf{q}$と$\mathbf{q}_0$との測地的距離の平方とする。$U$は(7.4.30)式を満たすはずである。$U$を(7.4.30)式に代入すると，$R(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)$は微分方程式

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial R}{\partial q_j}=4R \tag{7.4.35}$$

を満足する。したがって，測地的距離

$$r(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)=R(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)^{1/2} \tag{7.4.36}$$

自身は

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial r}{\partial q_i}\frac{\partial r}{\partial q_j}=1 \tag{7.4.37}$$

を満足する。

上述したN次元Euclid空間の例では，(7.4.23)式によって

$$R(\mathbf{q},\mathbf{q}_0)=(\mathbf{q}-\mathbf{q}_0)^2=\sum_{i=1}^{N}(q_i-q_{0i})^2 \tag{7.4.38}$$

であるので

$$\frac{\partial R}{\partial q_i}=2(q_i-q_{0i}) \tag{7.4.39}$$

となる。したがって

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial R}{\partial q_i}\frac{\partial R}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\delta_{ij}(\mathbf{q})(q_i - q_{0i})(q_j - q_{0j})$$

$$= 4\sum_{i=1}^{N}(q_i - q_{0i})^2 = 4R \qquad (7.4.40)$$

であるので，(7.4.35)式が満足されている。

[例 7.4.1]　つぎに，回転面上の測地線について考えて見よう。直行座標を x, y, z として， z 軸を回転軸とする $\rho = (x^2 + y^2)^{1/2} = \rho(z)$ で表される回転面を考える。面上の曲線座標として，z と z 軸まわりの角度 ϕ をとると，線素 ds は

$$ds^2 = (\rho d\phi)^2 + d\rho^2 + dz^2 = \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right] dz^2 + \rho^2 d\phi^2 \qquad (7.4.41)$$

である。ここで

$$q_1 = \int^z \left[1 + \left(\frac{d\rho}{dz}\right)^2\right]^{1/2} dz, \quad q_2 = \phi \qquad (7.4.42)$$

とすると，ds^2 は

$$ds^2 = dq_1{}^2 + f(q_1)^2 dq_2{}^2 \qquad (7.4.43)$$

と書ける。ここで

$$\rho = \rho(z) = f(q_1) \qquad (7.4.44)$$

とする。したがって

$$g_{11} = 1, \quad g_{12} = g_{21} = 0, \quad g_{22} = f(q_1)^2 \qquad (7.4.45)$$

および

$$h_{11} = 1, \quad h_{12} = h_{21} = 0, \quad h_{22} = 1/f(q_1)^2 \qquad (7.4.46)$$

であるので，

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} h_{ij}(\mathbf{q})\frac{\partial V}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q_j} = \left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 + \frac{1}{f(q_1)^2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 = 1 \qquad （7.4.47）$$

を得る。この方程式は変数分離で解けて

$$V = \pm\int^{q_1}\left[1 - \frac{\alpha_2{}^2}{f(q)^2}\right]^{1/2} dq + \alpha_2 q_2 \qquad (7.4.48)$$

となる。これを(7.4.31)式に代入して，(7.3.19)式に従って $\partial W/\partial\alpha_2 = \beta_2$ と

おけば

$$\pm \int^{q_1} \left[f(q)^2 - {\alpha_2}^2 \right]^{-1/2} f(q)^{-1} dq = q_2 - {\alpha_1}^{-1/2} \beta_2 \qquad (7.4.49)$$

を得る。これが測地線の方程式である。${\alpha_1}^{-1/2}\beta_2 = \beta_2'$を積分定数と考えてもよい。

§7.5　参考文献

[7.1] 寺沢寛一編,「数学概論(応用編)」, 岩波書店, (1960)

[7.2] 伏見康治,「現代物理学を学ぶための古典力学」, 岩波書店, (1964)