§7.3　Hamilton-Jacobi の方程式とその解

Lagrange の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = 0 \tag{7.1.2}$$

を書き換えてみよう。そこで

$$\mathbf{r} = \dot{\mathbf{q}} \tag{7.3.1}$$

とする。ここで，$\mathbf{r} = (r_1, r_2, \cdots, r_N)$ とする。すると，Lagrange の運動方程式は，一階の連立常微分方程式

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \mathbf{r} \tag{7.3.2a}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} \tag{7.3.2b}$$

に変換される。しかし、この形はあまり美しくない。

理想的な変換を与えるのが，以下に述べる正準変換(canonical transformation)である。$L(t, \mathbf{q}, \mathbf{r})$ が正則，すなわち

$$\det[L_{\mathbf{rr}}] = \det[L_{r_i r_j}] \neq 0 \tag{7.3.3}$$

ならば，ﾙｼﾞｬﾝﾄﾞﾙ変換(Legendre transformation)

$$\mathbf{p} = L_{\mathbf{r}} \tag{7.3.4a}$$

$$H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathbf{pr} - L(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}) \tag{7.3.4b}$$

を行える。ここで，$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \cdots, p_N)$ であり，この変換の意味するところは，(7.3.4a)式を解いて，$\mathbf{r}$ を $\mathbf{p}$ で表し，それを(7.3.4b)式に代入して，$t, \mathbf{q}, \mathbf{p}$ の関数として，Hamilton 関数 H を定義することである。(7.3.3)式により，(7.3.4a)式を解いて，$\mathbf{r}$ を $\mathbf{p}$ で表すことの可能性が保証されている。$\mathbf{p}$ は一般化運動量，H は総ｴﾈﾙｷﾞと呼ばれる。

H の微分を取ると

$$\begin{aligned} dH(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) &= \mathbf{p}d\mathbf{r} + \mathbf{r}d\mathbf{p} - L_{\mathbf{q}}d\mathbf{q} - L_{\mathbf{r}}d\mathbf{r} \\ &= \mathbf{r}d\mathbf{p} - L_{\mathbf{q}}d\mathbf{q} \end{aligned} \tag{7.3.5}$$

となる。これより

$$\mathbf{r} = H_{\mathbf{p}} \tag{7.3.6a}$$

$$L_{\mathbf{q}} = -H_{\mathbf{q}} \tag{7.3.6b}$$

を得る。これらを(7.3.2)式に代入すると，正準方程式(canonical equation)

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = H_{\mathbf{p}} \tag{7.3.7a}$$

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -H_{\mathbf{q}} \tag{7.3.7b}$$

が導かれる。

Legendre 変換(7.3.4)式の逆変換もまた Legendre 変換

$$\mathbf{r} = H_{\mathbf{p}} \tag{7.3.8a}$$

$$L(t, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \mathbf{pr} - H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{7.3.8b}$$

で与えられる。

Legendre 変換(7.3.4)式を用いて，(7.2.15)式を書き直すと

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L - \mathbf{rp} = -H(t, \mathbf{q}, \mathbf{p}) \tag{7.3.9a}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = L_{\dot{\mathbf{q}}} = \mathbf{p} \tag{7.3.9b}$$

を得る。この式において，$\mathbf{p}$ を消去すると，Hamilton-Jacobi の方程式

$$\frac{\partial W}{\partial t} + H\left(t, \mathbf{q}, \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right) = 0 \tag{7.3.10}$$

が導かれる。W はもともと始点 $P_a(t_a, \mathbf{q}_a)$ の関数であったが，(7.3.10)式は $t_a, \mathbf{q}_a$ の値の如何に関わらず成り立つ式である。

Hamilton-Jacobi の方程式の解 $W(t, \mathbf{q})$ から，停留関数(運動)を求めることを考えてみよう。(7.3.9b)式

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{p} \tag{7.3.9b}$$

より $\mathbf{p}$ を $\mathbf{q}$ で表して，これを(7.3.7a)式

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \tag{7.3.7a}$$

に代入すると，$\mathbf{q}$ に関する 1 階の常微分方程式を得るので，これを解けばよい。これを証明してみよう。(7.3.9b)式の両辺を t で微分すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial t} + \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}}\frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \tag{7.3.11a}$$

$$or \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{d}{dt}\frac{\partial W}{\partial q_i} = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\dot{q}_j = \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial t} + \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j}\frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{7.3.11b}$$

となる。一方，Hamilton-Jacobi の方程式(7.3.10)式を $\mathbf{q}$ で微分すると

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}\frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{q}\partial \mathbf{q}} \tag{7.3.12a}$$

$$or \quad \frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial t} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^{N}\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial^2 W}{\partial q_i \partial q_j} \tag{7.3.12b}$$

であるので，これを(7.3.11)式に代入すると

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \tag{7.3.7b}$$

式を得る。(7.3.7a)式はもともと満たされていたので，正準方程式を満足することになり，停留関数に外ならない。

もっと洗練された解き方がある。Legendre 積分を使って書き直したﾋﾙﾍﾞﾙﾄ(Hilbert)の不変積分

$$\int_{t_a}^{t}\left[\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(t,\mathbf{q},\mathbf{p})\right]dt \tag{7.3.13}$$

について考える。ここで，積分中の $\mathbf{q}=\mathbf{q}(t)$ は積分の始点 $P_a(t_a,\mathbf{q}_a)$ と終点 $P(t,\mathbf{q})$ を結ぶ任意の曲線であり， $\mathbf{p}$, H は場の値すなわち(7.3.9)式より

$$\mathbf{p} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} \tag{7.3.14a}$$

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = -\frac{\partial W}{\partial t} \tag{7.3.14b}$$

とする。これらを(7.3.13)式に代入すると

$$\int_{t_a}^{t}\left[\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(t,\mathbf{q},\mathbf{p})\right]dt = \int_{t_a}^{t}\left[\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\,d\mathbf{q} + \frac{\partial W}{\partial t}\,dt\right] = W(t,\mathbf{q}) - W(t_a,\mathbf{q}_a) \tag{7.3.15}$$

となり，Hilbert の不変積分は経路に依らないことが分かる。

Hamilton-Jacobi の方程式の N 個のﾊﾟﾗﾒｰﾀ $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_N)$ を含む ∞^N 個の解(このようなものを完全解と呼ぶ。)を

$$W = W(t,\mathbf{q};\boldsymbol{\alpha}) \tag{7.3.16}$$

とすると，Hilbert の不変積分により

$$W(t,\mathbf{q};\boldsymbol{\alpha}) - W(t_a,\mathbf{q}_a;\boldsymbol{\alpha}) = \int_{t_a}^{t}\left[\mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - H(t,\mathbf{q},\mathbf{p})\right]dt \tag{7.3.17}$$

がいえる。積分中の $\mathbf{q}$ は $\boldsymbol{\alpha}$ によらない任意の関数であるので，この式の両辺を $\boldsymbol{\alpha}$ で微分すると

$$W_{\boldsymbol{\alpha}}(t,\mathbf{q};\alpha)-W_{\boldsymbol{\alpha}}(t_a,\mathbf{q}_a;\alpha)=\int_{t_a}^{t}\left[\frac{\partial\mathbf{p}}{\partial\alpha}\left(\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}\right)\right]dt \tag{7.3.18a}$$

$$or\ W_{\alpha_i}(t,\mathbf{q};\alpha)-W_{\alpha_i}(t_a,\mathbf{q}_a;\alpha)=\int_{t_a}^{t}\left[\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)\right]dt \tag{7.3.18b}$$

を得る。停留曲線上では

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}} \tag{7.3.7a}$$

であるので

$$W_{\boldsymbol{\alpha}}(t,\mathbf{q};\boldsymbol{\alpha})=W_{\boldsymbol{\alpha}}(t_a,\mathbf{q}_a;\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\beta} \tag{7.3.19a}$$

$$or\ W_{\alpha_i}(t,\mathbf{q};\boldsymbol{\alpha})=W_{\alpha_i}(t_a,\mathbf{q}_a;\boldsymbol{\alpha})=\beta_i \tag{7.3.19b}$$

がいえる。ここで，$\boldsymbol{\beta}=(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_N)$は定数ﾍﾞｸﾄﾙである。

逆に，上式を$\mathbf{q}$について解くと一つの曲線が得られる。ただし

$$\det\left[\frac{\partial^2 W}{\partial q_i\partial\alpha_j}\right]\neq 0 \tag{7.3.20}$$

を仮定する。この曲線は停留曲線に外ならないことが，以下のように証明される。この曲線上の任意の位置にt_a, tを取っても(7.3.18)式は成立する。すなわち

$$0=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial p_j}{\partial\alpha_i}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\partial^2 W}{\partial q_j\partial\alpha_i}\left(\dot{q}_j-\frac{\partial H}{\partial p_j}\right),\quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.3.21}$$

が成り立つ。(7.3.21)式より，$\left[\partial^2 W/\partial q_i\partial\alpha_j\right]$の逆行列が存在するので

$$\dot{q}_j=\frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{7.3.7a}$$

がいえる。さらに，もともと

$$p_j=\frac{\partial W}{\partial q_j} \tag{7.3.14a}$$

がいえるので，上に述べたように停留曲線に外ならない。

[例 7.3.1]　簡単な例により，Hamilton-Jacobi の方程式とその解法を，具体的に説明する。1 質点の等速直線運動を考えると，Lagrange 関数は

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 \tag{7.1.5}$$

であるので，これより，(7.3.4)式より正準変換は

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = m\dot{\mathbf{q}} \tag{7.3.22a}$$

$$H(t,\mathbf{q},\mathbf{p}) = \mathbf{p}\dot{\mathbf{q}} - L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 \tag{7.3.22b}$$

と書ける。(7.3.10)式より，Hamilton-Jacobi の方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}\right)^2 = 0 \tag{7.3.23a}$$

$$or\ \ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 = 0 \tag{7.3.23b}$$

となる。

(7.3.23)式は，変数分離解を持つ。そこで

$$-2m\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)^2 \tag{7.3.24}$$

と書いて，α_i を定数として

$$\frac{\partial W}{\partial q_i} = \alpha_i \tag{7.3.25a}$$

$$-2m\frac{\partial W}{\partial t} = \sum_{i=1}^{N}\alpha_i{}^2 \tag{7.3.25b}$$

とすると，完全解

$$W = -\frac{t}{2m}\sum_{i=1}^{N}\alpha_i{}^2 + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i q_i \tag{7.3.26}$$

が求まる。W を α_i で微分すると，(7.3.19)式より

$$\frac{\partial W}{\partial \alpha_i} = -\frac{t}{m_i}\alpha_i + q_i = \beta_i \tag{7.3.27}$$

となる。ここで，β_i は定数である。α_i/m を α_i と書くことにすると，停留解は

$$q_i = \alpha_i t + \beta_i\ \ or\ \ \mathbf{q} = \boldsymbol{\alpha} t + \boldsymbol{\beta} \tag{7.3.28}$$

と求まる。

[例 7.3.2] つぎに，1 次元の調和振動子を取り上げてみよう。Lagrange 関数は

$$L(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2}m\dot{q}^2 - \frac{1}{2}kq^2 \tag{7.1.10}$$

であるので，正準変換は(7.3.4)式より

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m\dot{q} \tag{7.3.29a}$$

$$H(t,q,p) = p\dot{q} - L(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2m}p^2 + \frac{k}{2}q^2 \tag{7.3.29b}$$

となる。(7.3.10)式より，Hamilton-Jacobi の方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = 0 \tag{7.3.30}$$

であるので，変数分離解が存在する。そこで

$$-\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{k}{2}q^2 = \alpha \tag{7.3.31}$$

と書くと

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\left(\alpha - \frac{k}{2}q^2\right)} = \sqrt{mk}\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} \tag{7.3.32}$$

となるので，W は

$$W = -\alpha t + \frac{\sqrt{mk}}{2}\left[q\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2} + \frac{2\alpha}{k}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\,q\right)\right] \tag{7.3.33}$$

と求まる。W を α で微分すると，(7.3.19)式より β を定数として

$$\beta = \frac{\partial W}{\partial \alpha}$$

$$= -t + \frac{\sqrt{mk}}{2}\left[q\frac{\frac{1}{k}}{\sqrt{\frac{2\alpha}{k} - q^2}} + \frac{2}{k}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\,q\right) + \frac{2\alpha}{k}\frac{\frac{-1}{2}\sqrt{\frac{k}{2\alpha^3}}\,q}{\sqrt{1 - \frac{k}{2\alpha}q^2}}\right]$$

$$= -t + \sqrt{\frac{m}{k}}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{k}{2\alpha}}\,q\right) \tag{7.3.34}$$

が導かれる。$\sqrt{2\alpha/k}$ を α と書くことにすると，停留解 $\mathbf{q}$ が

$$q = \alpha\sin\left[\sqrt{\frac{k}{m}}(t + \beta)\right] \tag{7.3.35}$$

と求まる。

[例 7.3.3]　最後に，対称こまの運動について考えてみよう[7.2]。こまの下

端は一点Oに固定されて動かないものとし，対称軸のまわりの慣性ﾓ-ﾒﾝﾄをC，対称軸に垂直な軸のまわりの慣性ﾓ-ﾒﾝﾄをAとする。対称こまであるので，重心Gが対称軸の上にあって，$OG=h$とする。

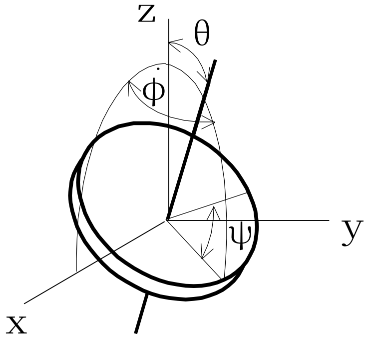

図 7.3.1 対称こま

こまの位置を表す座標として，図 7.4.1 に示されるｵｲﾗ-角を採用する。すなわち，こまの軸の垂直軸からの傾きをθ，こまの軸を含む子午面のxz面からの回転をϕ，軸のまわりの回転をψとする。

重力加速度をg，こまの質量をmとすると，こまの位置ｴﾈﾙｷﾞUは

$$U=U(\theta)=mgh\cos\theta \tag{7.3.36}$$

で表される。また，ｵｲﾗ-角の時間微分を$\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi}$とすると，角速度ﾍﾞｸﾄﾙがこまの軸の方向を向く成分の角速度ω_a、および、軸に垂直な成分のうち、角速度ﾍﾞｸﾄﾙが軸を含む子午面内にあるものの角速度ω_{n1}と軸を含む子午面に垂直なものの角速度ω_{n2}は

$$\omega_a=\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta \tag{7.3.37a}$$

$$\omega_{n1}=-\dot{\phi}\sin\theta \tag{7.3.37b}$$

$$\omega_{n2}=\dot{\theta} \tag{7.3.37c}$$

であるので、運動ｴﾈﾙｷﾞTは

$$T=T(\theta,\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi})=\frac{1}{2}\left[C\omega_a{}^2+A(\omega_{n1}{}^2+\omega_{n2}{}^2)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[C(\dot{\psi}+\dot{\phi}\cos\theta)^2+A(\dot{\phi}^2\sin^2\theta+\dot{\theta}^2)\right] \tag{7.3.38}$$

で表される。Lagrange 関数Lは

$$L=L(\theta,\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi})=T(\theta,\dot{\theta},\dot{\phi},\dot{\psi})-U(\theta) \tag{7.3.39}$$

であり，Lに$\dot{\phi},\dot{\psi}$が含まれていないので，ϕ,ψが循環座標であることが分かる。すなわち

$$\frac{dL_{\dot\phi}}{dt} = L_\phi = 0 \quad or \quad L_{\dot\phi} = M_z = const \tag{7.3.40a}$$

$$\frac{dL_{\dot\psi}}{dt} = L_\psi = 0 \quad or \quad L_{\dot\psi} = M_\varsigma = const \tag{7.3.40b}$$

となる。ここで，M_z, M_ζ はそれぞれ角運動量ﾍﾞｸﾄﾙの垂直および軸方向成分である。

Lagrange 関数 L より正準運動量を求めると

$$p_\theta = L_{\dot\theta} = T_{\dot\theta} = A\dot\theta \tag{7.3.41a}$$

$$p_\phi = L_{\dot\phi} = T_{\dot\phi} = A\dot\phi\sin^2\theta + C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta \tag{7.3.41b}$$

$$p_\psi = L_{\dot\psi} = T_{\dot\psi} = C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) \tag{7.3.41c}$$

となる。一方，

$$L_\theta = T_\theta - U_\theta = -C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\dot\phi\sin\theta + A\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta \tag{7.3.42a}$$

$$L_\phi = T_\phi - U_\phi = 0 \tag{7.3.42b}$$

$$L_\psi = T_\psi - U_\psi = 0 \tag{7.3.42c}$$

であるので，運動方程式は

$$A\ddot\theta + C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\dot\phi\sin\theta - A\dot\phi^2\sin\theta\cos\theta = 0 \tag{7.3.43a}$$

$$A\dot\phi\sin^2\theta + C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta)\cos\theta = M_z \tag{7.3.43b}$$

$$C(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = M_\zeta \tag{7.3.43c}$$

となる。この非線形連立上微分方程式を解けば，運動が求まるわけであるが，直接的に解析解を求めることは不可能であろう。しかし，Hamilton-Jacobi の理論に従うと, 以下に述べるようにこれが可能となる。

これを $\dot\theta, \dot\phi, \dot\psi$ について解くと

$$\dot\theta = \frac{p_\theta}{A} \tag{7.3.44a}$$

$$\dot\phi = \frac{p_\phi - p_\psi\cos\theta}{A\sin^2\theta} \tag{7.3.44b}$$

$$(\dot\psi + \dot\phi\cos\theta) = \frac{p_\psi}{C} \tag{7.3.44c}$$

と求まる。したがって，Hamilton 関数は

$$H = p_\theta \dot\theta + p_\phi \dot\phi + p_\psi \dot\psi - L$$

$$= \frac{{p_\theta}^2}{A} + p_\phi \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{A\sin^2\theta} + p_\psi \left(\frac{p_\psi}{C} - \frac{p_\phi - p_\psi \cos\theta}{A\sin^2\theta} \cos\theta \right)$$

$$-\frac{1}{2}\left\{ A\left[\frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{A^2 \sin^4\theta} \sin^2\theta + \frac{{p_\theta}^2}{A^2} \right] + \frac{{p_\psi}^2}{C} \right\} + mgh\cos\theta$$

$$= \frac{{p_\theta}^2}{2A} + \frac{(p_\phi - p_\psi \cos\theta)^2}{2A\sin^2\theta} + \frac{{p_\psi}^2}{2C} + mgh\cos\theta \qquad (7.3.45)$$

となる。これより，Hamilton の主関数をWとすると，Hamilton-Jacobi の方程式は

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(\frac{\partial W}{\partial \phi} - \frac{\partial W}{\partial \psi}\cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2C}\left(\frac{\partial W}{\partial \psi}\right)^2 + mgh\cos\theta = 0 \qquad (7.3.46)$$

と書ける。ここで，(7.3.40)式より

$$\frac{\partial W}{\partial \phi} = p_\phi = L_{\dot\phi} = M_z = const \qquad (7.3.47a)$$

$$\frac{\partial W}{\partial \psi} = p_\psi = L_{\dot\psi} = M_\varsigma = const \qquad (7.3.47b)$$

であるので，これを(7.3.44)式に代入すると

$$\frac{\partial W}{\partial t} + \frac{1}{2A}\left(\frac{\partial W}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(M_z - M_\zeta \cos\theta\right)^2 + \frac{1}{2C}{M_\zeta}^2 + mgh\cos\theta = 0 \qquad (7.3.48)$$

となる。

(7.3.48)式の微分方程式は変数分離解が可能である。いま

$$W = -Et + \Theta(\theta) + M_z\phi + M_\zeta\psi \qquad (7.3.49)$$

と置くと，Θに関する

$$\frac{1}{2A}\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(M_z - M_\zeta\cos\theta\right)^2 + mgh\cos\theta = E - \frac{1}{2C}{M_\zeta}^2 \qquad (7.3.50)$$

という微分方程式を得る。これを解くと

$$\Theta = \int \left\{ 2A \left[E - \frac{1}{2C} M_\zeta{}^2 - \frac{1}{2A\sin^2\theta} \left(M_z - M_\zeta \cos\theta \right)^2 - mgh\cos\theta \right] \right\}^{1/2} d\theta \quad (7.3.51)$$

であるので，(7.3.47)式より，Hamilton-Jakobi の方程式の完全解が

$$W = -Et + \int \left\{ 2A \left[E - \frac{1}{2C} M_\zeta{}^2 - \frac{1}{2A\sin^2\theta} \left(M_z - M_\zeta \cos\theta \right)^2 - mgh\cos\theta \right] \right\}^{1/2} d\theta + M_z\phi + M_\zeta\psi \quad (7.3.52)$$

と求まる。ここで，M_z, M_ζ は積分定数であり，それぞれ角運動量ﾍﾞｸﾄﾙの垂直および軸方向成分という物理的な意味を有する。

(7.3.19)式より，運動はWをM_z, M_ζ, Eで微分することにより求まる。まず，WをEで微分すると

$$const = \frac{\partial W}{\partial E} = -t + \int 2A \left\{ 2A \left[E - \frac{1}{2C} M_\zeta{}^2 - \frac{1}{2A\sin^2\theta} \left(M_z - M_\zeta \cos\theta \right)^2 - mgh\cos\theta \right] \right\}^{-1/2} d\theta \qquad (7.3.53)$$

であるから，tとθの関係

$$t = const - 2A \int \left\{ \left[2A \left(E - \frac{1}{2C} M_\zeta{}^2 - mgh\cos\theta \right) (1 - \cos^2\theta) - \left(M_z - M_\zeta \cos\theta \right)^2 \right] \right\}^{-1/2} d(\cos\theta) \qquad (7.3.54)$$

が求まる。これから先の議論には楕円積分を使わねばならない。ここでは，むしろこの式を計算機で直接数値積分することをｲﾒｰｼﾞして欲しい。平方根の中身は$u = \cos\theta$の三次式であり，一般に三つの根を持っている。-1と$+1$の間にある 2 根が，$u = \cos\theta$の変動の範囲を決める。もう一つの根は，$+1$よりも大きいところにある。この積分では$u = \cos\theta$が変域の両端に達するごとに，平方根の符合が変わって時間tは一方向きに増えて行くものと考える。

同様にWをM_zで微分すると

$$const = \frac{\partial W}{\partial M_z}$$

$$=-\int \frac{(2A)^{1/2}(M_z - M_\zeta \cos\theta)}{\sin^2\theta}$$

$$\left\{2A\left[E-\frac{1}{2C}M_\zeta{}^2-\frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(M_z-M_\zeta\cos\theta\right)^2-mgh\cos\theta\right]\right\}^{-1/2}d\theta$$

$$+\phi \qquad (7.3.55)$$

であるから，ϕ と θ の関係

$$\phi = const + \int \frac{(M_z - M_\zeta \cos\theta)}{1-\cos^2\theta}$$

$$\left[2A\left(E-\frac{1}{2C}M_\zeta{}^2-mgh\cos\theta\right)(1-\cos^2\theta)-\left(M_z-M_\zeta\cos\theta\right)^2\right]^{-1/2}d(\cos\theta)$$

$$(7.3.56)$$

が求まる。この場合には，上で述べた平方根の符号の変化の上に，さらに $(M_z - M_\zeta \cos\theta)$ が符号を変える可能性があるので，ϕ は単調に増加するとは限らない。そういう場合には，こまの軸は二つの等緯線の間をｻｲｸﾛｲﾄﾞ状に変化する．$(M_z - M_\zeta \cos\theta)$ が符号を変えない場合には，単純な波状になる。

同様にして，W を M_ζ で微分すると

$$const = \frac{\partial W}{\partial M_\zeta}$$

$$=\int \frac{(2A)^{1/2}(M_z - M_\zeta \cos\theta)\cos\theta}{\sin^2\theta}$$

$$\left\{2A\left[E-\frac{1}{2C}M_\zeta{}^2-\frac{1}{2A\sin^2\theta}\left(M_z-M_\zeta\cos\theta\right)^2-mgh\cos\theta\right]\right\}^{-1/2}d\theta$$

$$+\psi \qquad (7.3.57)$$

であるから，ψ と θ の関係

$$\psi = const - \int \frac{(M_z - M_\zeta \cos\theta)\cos\theta}{1-\cos^2\theta}$$

$$\left[2A\left(E-\frac{1}{2C}M_\zeta{}^2-mgh\cos\theta\right)(1-\cos^2\theta)-\left(M_z-M_\zeta\cos\theta\right)^2\right]^{-1/2}d(\cos\theta)$$

$$(7.3.58)$$

が求まる。

上述の平方根内の 3 次式の 2 根が重なってしまうと，こまの軸の傾きが

一定，すなわち

$$\theta = const, \quad \dot{\theta} = 0 \tag{7.3.59}$$

という運動になる。このときの運動は(7.3.43)式の運動方程式により，与えられた M_ζ, M_z に対して $\theta, \dot{\phi}, \dot{\psi}$ が一意に決まり一定値を取る。この運動をこまの定常運動と呼ぶ。(7.3.37c)式より $\omega_{n2} = 0$ であるから，図 7.3.2 に示されるように

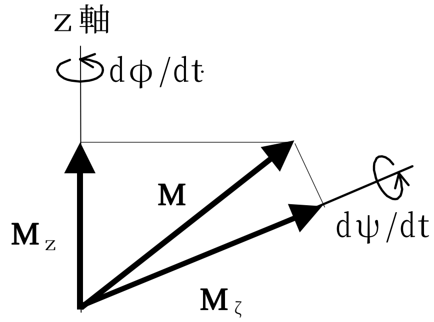

図 7.3.2 定常運動時の角運動量ﾍﾞｸﾄﾙ **M**

角運動量ﾍﾞｸﾄﾙ **M** はこまの軸を含む子午面内にあり

$$M^2 = (C\omega_a)^2 + (A\omega_{n1})^2 = C^2(\dot{\psi} + \dot{\phi}\cos\theta)^2 + A^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta = const \tag{7.3.60}$$

である。角運動量ﾍﾞｸﾄﾙ **M** は大きさは一定であるが，こまの軸を含む子午面とともに z 軸のまわりを回転しているので

$$|d\mathbf{M}| = |\mathbf{M}|\sin\theta'\dot{\phi}dt \tag{7.3.61}$$

という変化をする。ここで，θ' は角運動量ﾍﾞｸﾄﾙ **M** と z 軸との間の角である。したがって，こまが z 軸から θ 傾いて回転するためには，こまの軸を含む子午面に垂直な方向に，(7.3.61)式で与えられる角運動量ﾍﾞｸﾄﾙ **M** の変化を可能にするﾓｰﾒﾝﾄ **N** が働いていないといけない。すなわち

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{M}\times\dot{\phi} = \mathbf{N} \tag{7.3.62}$$

である。今の場合，ﾓｰﾒﾝﾄ **N** は，重心に働く重力とこまの下端が床から受ける反力が，こまの軸を含む子午面の垂直な方向に作るﾓｰﾒﾝﾄ $mgh\sin\theta$ である。したがって

$$|\mathbf{M}|\sin\theta'\dot{\phi} = |\mathbf{N}| = mgh\sin\theta \tag{7.3.63}$$

を得る。

このようなこまの定常運動で，こまの軸が傾いたまま回ることを歳差運動(precession)という。非常に速く回したこまはこのような運動をするが，

小刻みのおじぎ運動(nutation，章動)を伴っていることが多い。