§7.2　Hamilton の主関数の微係数

$\mathbf{q}=(q_1,q_2,\cdots,q_N)$ を停留関数とすると，Hamilton の主関数 W は

$$W(t_b,\mathbf{q}_b)=\int_{t_a}^{t_b}L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})dt \tag{7.2.1}$$

で定義される。$W(t_b,\mathbf{q}_b)$ を t_b で微分すると

$$\frac{\partial W}{\partial t_b}=L(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)+\int_{t_a}^{t_b}\left(L_{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}+L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t_b}\right)dt \tag{7.2.2}$$

となる。ここで

$$L_{\mathbf{q}}=\left(\frac{\partial L}{\partial q_1},\frac{\partial L}{\partial q_2},\cdots,\frac{\partial L}{\partial q_N}\right)=(L_{q_1},L_{q_2},\cdots,L_{q_N}) \tag{7.2.3a}$$

$$L_{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}=\sum_{j=1}^{N}L_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial t_b} \tag{7.2.3b}$$

とする。ところで

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial t_b}=\frac{\partial}{\partial t_b}\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right)=\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b} \tag{7.2.4}$$

と書けるので，これを使って(7.2.2)式の積分を変形すると

$$\frac{\partial W}{\partial t_b}=(L)_{t_b}+\int_{t_a}^{t_b}\left[L_{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}+\frac{d}{dt}\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}\right)-\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}\right]dt$$

$$=(L)_{t_b}+\left[L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}\right]_{t_a}^{t_b}+\int_{t_a}^{t_b}\left(L_{\mathbf{q}}-\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}\right)\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}dt \tag{7.2.5}$$

となるが，$(\mathbf{q})_{t_a}=\mathbf{q}_{t_a}$ であるので，$(\partial\mathbf{q}/\partial t_b)_{t_a}=0$ であることと Lagrange の運動方程式(7.1.2)式より

$$\frac{\partial W}{\partial t_b}=(L)_{t_b}+\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t_b}\right)_{t_b} \tag{7.2.6}$$

を得る。同様にして $W(t_b,\mathbf{q}_b)$ を $\mathbf{q}_b$ で微分すると

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}_b}=\int_{t_a}^{t_b}\left(L_{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_b}+L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}_b}\right)dt$$

$$=\int_{t_a}^{t_b}\left[L_{\mathbf{q}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_b}+\frac{d}{dt}\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_b}\right)-\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \mathbf{q}_b}\right]dt$$

$$=\left[L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}\right]_{t_a}^{t_b}+\int_{t_a}^{t_b}\left(L_{\mathbf{q}}-\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}\right)\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}dt \tag{7.2.7}$$

となる。ここで

$$L_{\mathbf{q}}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}=\sum_{j=1}^{N}L_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial\mathbf{q}_b}=\left(\sum_{j=1}^{N}L_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_{1b}},\ \sum_{j=1}^{N}L_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_{2b}},\ \cdots,\ \sum_{j=1}^{N}L_{q_j}\frac{\partial q_j}{\partial q_{Nb}}\right) \tag{7.2.8}$$

とする。$(\mathbf{q})_{t_a}=\mathbf{q}_{t_a}$ であるので，$\left(\dfrac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}\right)_{t_a}=0$ であることと Lagrange の運動方程式より

$$\frac{\partial W}{\partial\mathbf{q}_b}=\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}\right)_{t_b} \tag{7.2.9}$$

を得る。

一方

$$\mathbf{q}_b=\mathbf{q}(t_b;t_a,\mathbf{q}_a,t_b,\mathbf{q}_b)\ \ or\ \ q_{jb}=q_j(t_b;t_a,\mathbf{q}_a,t_b,\mathbf{q}_b) \tag{7.2.10}$$

を，t_b で微分すると

$$0=(\dot{\mathbf{q}})_{t_b}+\left(\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial t_b}\right)_{t_b}\ \ or\ \ 0=(\dot{q}_j)_{t_b}+\left(\frac{\partial q_j}{\partial t_b}\right)_{t_b} \tag{7.2.11}$$

となる。また，$\mathbf{q}_b$ で微分すると

$$\boldsymbol{\delta}=\left(\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}\right)_{t_b}\ \ or\ \delta_{ij}=\left(\frac{\partial q_j}{\partial q_{ib}}\right)_{t_b} \tag{7.2.12}$$

である。ここで

$$\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\frac{\partial\mathbf{q}}{\partial\mathbf{q}_b}\right)_{t_b}=\left[\left(\sum_{j=1}^{N}L_{\dot{q}_j}\delta_{1j}\right)_{t_b},\left(\sum_{j=1}^{N}L_{\dot{q}_j}\delta_{2j}\right)_{t_b},\cdots,\left(\sum_{j=1}^{N}L_{\dot{q}_j}\delta_{Nj}\right)_{t_b}\right]=(L_{\dot{\mathbf{q}}})_{t_b} \tag{7.2.13}$$

とする。(7.2.11)式と(7.2.12)式を，(7.2.6)式と(7.2.9)式に代入すると

$$\frac{\partial W}{\partial t_b}=(L-\dot{\mathbf{q}}L_{\dot{\mathbf{q}}})_{t_b} \tag{7.2.14a}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\mathbf{q}_b}=\left(L_{\dot{\mathbf{q}}}\right)_{t_b} \tag{7.2.14b}$$

となる。

ここで，改めて t_b, $\mathbf{q}_b$ を t, $\mathbf{q}$ と書くことにすると，$W=W(t,\mathbf{q})$ として

$$\frac{\partial W}{\partial t} = L - \dot{\mathbf{q}} L_{\dot{\mathbf{q}}} \tag{7.2.15a}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = L_{\dot{\mathbf{q}}} \tag{7.2.15b}$$

となる。

変分計算によって，(7.2.14)式を求めてみよう[7.2]。図 7.2.1 に示すように，$\mathbf{q}$ばかりでなくtについても変分を考える。tの変分を考えない場合には，$\mathbf{q}$をtの関数と考えれば良いが，tについても変分を考える場合には，P_aで0およびP_bで1となるﾊﾟﾗﾒｰﾀsを考えて，$\mathbf{q}$とtをsの関数と考えることにする。

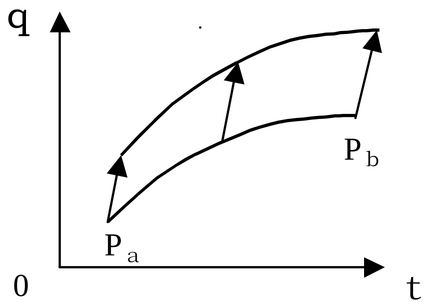

図 7.2.1 変分$\delta\mathbf{q}$, δt

$\mathbf{q}$ばかりでなくtについても変分を考えるので，$\mathbf{q}$のtに関する微分は

$$\begin{aligned}
\delta\left(\frac{d\mathbf{q}}{dt}\right) &= \mathit{first\ order\ of}\left[\frac{d(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q})}{d(t+\delta t)} - \frac{d\mathbf{q}}{dt}\right] \\
&= \mathit{first\ order\ of}\left[\frac{d(\mathbf{q}+\delta\mathbf{q})dt - d\mathbf{q}d(t+\delta t)}{d(t+\delta t)dt}\right] \\
&= \frac{d\delta\mathbf{q}}{dt} - \frac{d\mathbf{q}}{dt}\frac{d\delta t}{dt}
\end{aligned} \tag{7.2.16}$$

ということになる。したがって

$$\begin{aligned}
\delta\left[L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})dt\right] &= \delta L \cdot dt + L \cdot \delta(dt) \\
&= \left[\frac{\partial L}{\partial t}\delta t + \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\dot{\mathbf{q}}\right]dt + L \cdot d\delta t
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\left[\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\left(\frac{d\delta\mathbf{q}}{dt}-\frac{d\mathbf{q}}{dt}\frac{d\delta t}{dt}\right)\right]dt+d(L\delta t)-dL\cdot\delta t\\
&=\left[\frac{\partial L}{\partial t}\delta t+\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\delta\mathbf{q}\right.\\
&\quad+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\right)\delta\mathbf{q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\delta t\right)+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)\delta t\\
&\quad\left.+\frac{dL\delta t}{dt}-\frac{dL}{dt}\delta t\right]dt\\
&=\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{dL}{dt}\right]\delta t-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}\right.\\
&\quad\left.+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\delta t\right)+\frac{dL\delta t}{dt}\right\}
\end{aligned}
\tag{7.2.17}
$$

となる。

これを用いると

$$
\begin{aligned}
&\delta W(t_b,\mathbf{q}_b)=\delta\int_0^1 L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,dt(s)=\int_0^1\delta\left[L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\,dt(s)\right]\\
&=\int_0^1\left\{\begin{aligned}&\left[\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{dL}{dt}\right]\delta t-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}\\
&\qquad+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}\right)-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\delta t\right)+\frac{dL\delta t}{dt}\end{aligned}\right\}dt(s)\\
&=L(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)\delta t_b-L(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)\delta t_a\\
&\quad+\int_0^1\left\{\left[\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{dL}{dt}\right]\delta t-\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\right)\delta\mathbf{q}\right\}dt(s)\\
&\quad+\left[\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\delta\mathbf{q}-\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\delta t\right]_{t_a}^{t_b}\\
&=L_{\dot{\mathbf{q}}}(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)\delta\mathbf{q}_b+\left[L(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)-L_{\dot{q}}(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)\dot{\mathbf{q}}_b\right]\delta t_b\\
&\quad-L_{\dot{\mathbf{q}}}(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)\delta\mathbf{q}_a-\left[L(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)-L_{\dot{q}}(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)\dot{\mathbf{q}}_a\right]\delta t_a
\end{aligned}
\tag{7.2.18}
$$

が求まる。ここで，Lagrange の運動方程式

$$
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}=0 \tag{7.1.2}
$$

およびｴﾈﾙｷﾞの式

$$\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{dL}{dt}=0 \tag{7.2.19}$$

が用いられた。

(7.2.19)式は，Lagrange の運動方程式(7.1.2)式の両辺に$\dot{\mathbf{q}}$を掛けると得られる

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}}-\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}=0 \tag{7.2.20}$$

に，微分公式

$$\frac{dL}{dt}=\frac{\partial L}{\partial t}+\frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}}+\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\ddot{\mathbf{q}} \tag{7.2.21}$$

を代入すると得られる。一般に，運動ｴﾈﾙｷﾞ $T(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ は$\dot{\mathbf{q}}$の 2 次式，すなわち

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}a_{ij}(q)\dot{q}_i\dot{q}_j,\quad where\ a_{ij}=a_{ji} \tag{7.2.22}$$

であるので，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞを$U(\mathbf{q})$として， $L=T-U$ に関して

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}-L=2T-(T-U)=T+U \tag{7.2.23}$$

がいえる。したがって， Lがtを陽に含まなければ，(7.2.19)式より

$$0=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}-L\right)=\frac{d(T+U)}{dt} \tag{7.2.24}$$

となる。すなわち，総ｴﾈﾙｷﾞ $T+U$ が一定であることになるので，(7.2.19)式のことをｴﾈﾙｷﾞの式という。

(7.2.18)式より

$$W_{t_b}(t_b,\mathbf{q}_b)=L(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)-L_{\dot{q}}(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)\dot{\mathbf{q}}_b \tag{7.2.25a}$$

$$W_{q_b}(t_b,q_b)=L_{\dot{q}}(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b) \tag{7.2.25b}$$

$$W_{t_a}(t_a,\mathbf{q}_a)=-L(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)+L_{\dot{\mathbf{q}}}(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a)\dot{\mathbf{q}}_a \tag{7.2.26a}$$

$$W_{\mathbf{q}_a}(t_a,\mathbf{q}_a)=-L_{\dot{\mathbf{q}}}(t_a,\mathbf{q}_a,\dot{\mathbf{q}}_a) \tag{7.2.26b}$$

を得るが，(7.2.25)式は(7.2.14)式に外ならない。

(7.2.14)式が成り立つことを，(7.1.9)式で結果が与えられている簡単な 1 質点の等速運動の例で示そう。そのために，t_b, $\mathbf{q}_b$をt, $\mathbf{q}$と書くことにすると

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a} \tag{7.2.27a}$$

$$L_{\dot{\mathbf{q}}}(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = m\dot{\mathbf{q}} = m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right) \tag{7.2.27b}$$

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)^2 \tag{7.2.27c}$$

$$W(t,\mathbf{q}) = \frac{1}{2}m\frac{(\mathbf{q}-\mathbf{q}_a)^2}{t-t_a} \tag{7.2.27d}$$

であるので

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial t} &= -\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)^2 \\ &= -m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)\cdot\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)+\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)^2 = -L_{\dot{\mathbf{q}}}\dot{\mathbf{q}}+L\end{aligned} \tag{7.2.28a}$$

$$\frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right) = L_{\dot{\mathbf{q}}} \tag{7.2.28b}$$

となる。すなわち，(7.2.14)式が成立している。