§7.　Hamilton-Jacobi の理論

解析力学に現れるﾊﾐﾙﾄﾝ-ﾔｺﾋﾞ(Hamilton Jacobi)の理論は数学的に重要であるので，その概要を述べる。参考文献［7.1］に極めて優れた解説があるので，大筋はそれに沿って述べる。力学以外への応用例として，測地線についても論ずる。力学固有の問題については，参考文献[7.2]を参考にした。

§7.1　Hamilton の主関数

有限な自由度 N の力学系の問題を考えてみよう。t を時間とし，一般化座標 $\mathbf{q}(t)=(q_1(t),q_2(t),\cdots,q_N(t))$ を N 次元空間のﾍﾞｸﾄﾙとして，t と $\mathbf{q}$ で作られる $N+1$ 次元空間において作用積分 $I[\mathbf{q}]$ を

$$I[\mathbf{q}]=\int_{t_a}^{t_b}L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})dt \tag{7.1.1}$$

とする。ここで，$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})$ はﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｪ(Lagrange)関数，$\dot{\mathbf{q}}$ は $\mathbf{q}$ の t による微分，すなわち $\dot{\mathbf{q}}=(\dot{q}_1,\dot{q}_2,\cdots,\dot{q}_N)$ である。Lagrange の運動方程式(変分問題 $I[\mathbf{q}]=stationary$ の Euler の方程式)は

$$\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}-L_{\mathbf{q}}=0 \tag{7.1.2a}$$

あるいは

$$\frac{dL_{\dot{q}_i}}{dt}-L_{q_i}=0,\quad (i=1,2,\cdots,N) \tag{7.1.2b}$$

で与えられる。

t と $\mathbf{q}$ が作る $N+1$ 次元空間に，2 点

$$P_a：\ t=t_a，\ \mathbf{q}=\mathbf{q}_a \tag{7.1.3a}$$

$$P_b：\ t=t_b，\ \mathbf{q}=\mathbf{q}_b \tag{7.1.3b}$$

を取り，この 2 点を停留曲線，すなわち(7.1.2)式で与えられる Lagrange の運動方程式を満足する曲線

$$\mathbf{q}=\mathbf{q}(t;\ t_b,\mathbf{q}_b) \tag{7.1.4}$$

で結ぶことができるものとする。この停留関数を(7.1.1)式の作用積分に代入してえられる積分は P_b の関数となる。これを $W(t_b,\mathbf{q}_b)$ と書き Hamilton

の主関数と呼ぶ。特性関数あるいはｱｲｺﾅﾙ(Eikonal)と呼ばれることもある。当然ながら，$\mathbf{q}, W$ は P_a の関数でもあるが，P_a は固定しておく。

[例 7.1.1]　N 次元空間の 1 質点の等速運動を例にとって, 具体的に見てみよう。質量を m とすると，Lagrange 関数 L は座標 $\mathbf{q}=(q_1, q_2, \cdots, q_N)$ の関数として

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}m\dot{\mathbf{q}}^2 \tag{7.1.5}$$

で与えられる。停留曲線は Lagrange の運動方程式

$$0=\frac{dL_{\dot{\mathbf{q}}}}{dt}-L_{\mathbf{q}}=m\ddot{\mathbf{q}} \tag{7.1.6}$$

を解いて

$$\mathbf{q}=\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}(t-t_a)+\mathbf{q}_a \tag{7.1.7a}$$

$$\dot{\mathbf{q}}=\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}=\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a} \tag{7.1.7b}$$

と求まる。これを(7.1.5)式に代入すると

$$L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}\right)^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}-\mathbf{q}_a}{t-t_a}\right)^2 \tag{7.1.8}$$

となる。したがって

$$\dot{\mathbf{q}}_b=\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a} \tag{7.1.9a}$$

$$L_{\dot{\mathbf{q}}}(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)=m\dot{\mathbf{q}}_b=m\left(\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}\right) \tag{7.1.9b}$$

$$L(t_b,\mathbf{q}_b,\dot{\mathbf{q}}_b)=\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}\right)^2 \tag{7.1.9c}$$

$$W(t_b,\mathbf{q}_b)=\int_{t_a}^{t_b}L(t,\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})dt=\int_{t_a}^{t_b}\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a}{t_b-t_a}\right)^2dt=\frac{1}{2}m\frac{(\mathbf{q}_b-\mathbf{q}_a)^2}{t_b-t_a} \tag{7.1.9d}$$

が得られる。これらの式は次節で用いられる。

[例 7.1.2]　別の例として 1 次元の調和振動子を考えてみよう。質量を m，ばね定数を k とすると，Lagrange 関数は

$$L(t,q,\dot{q})=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2 \tag{7.1.10}$$

で与えられる。停留曲線は Lagrange の運動方程式

$$0=\frac{dL_{\dot{q}}}{dt}-L_q=m\ddot{q}+kq \tag{7.1.11}$$

を解いて

$$q=q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a)+\frac{q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a) \tag{7.1.12a}$$

$$\begin{aligned}\dot{q}&=-\sqrt{\frac{k}{m}}\,q_a\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a)\\&\quad+\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot\frac{q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a)\end{aligned} \tag{7.1.12b}$$

と求まる。これを(7.1.10)式に代入すると

$$\begin{aligned}L(t,q,\dot{q})&=\frac{1}{2}m\dot{q}^2-\frac{1}{2}kq^2\\&=-\left[\frac{k}{2}{q_a}^2+\frac{k}{2}\frac{\left(q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)\right)^2}{\sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\right]\cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a)\\&\quad-kq_a\frac{q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\cdot\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}(t-t_a)\end{aligned} \tag{7.1.13}$$

となる。したがって

$$W(t_b,q_b)=\int_{t_a}^{t_b}L(t,q,\dot{q})\,dt$$

$$
=-\left[\frac{k}{2}q_a{}^2+\frac{k}{2}\frac{\left(q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)\right)^2}{\sin^2\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\right]\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\sin 2\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)
$$

$$
-kq_a\frac{q_b-q_a\cos\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}\left(\cos 2\sqrt{\frac{k}{m}}(t_b-t_a)-1\right) \qquad (7.1.14)
$$

が得られる。