§6.5　物理量の上下界評価式

§4.1～2 において，棒のねじり問題を取り上げた。そこでは，棒のねじり剛性に関する上下解評価式(Treffz [6.1])が導かれることを示した。

Treffz の方法に従うと，無限流体中の物体に作用する付加質量などの流体力の非連成成分(付加質量ﾏﾄﾘｸｽの対角成分，例えば上下揺れによる流体力の上下揺れ成分)は，変分問題の汎関数の停留値であり，さらにその上下界を求めることができる。しかし，連成成分(例えば上下揺れによる流体力の左右揺れ成分)の上下解を求めることはできない。

本節で述べる作用定理を用いると，連成流体力についても，非連成成分と同様の結果を導くことができる。

Greenberg[6.2]，Cooperman[6.3]は，hyper circle method と Green 関数を組み合わせて，変関数の任意点の値について，上下界を求める方法を導いている。本節で述べる方法によれば，関数値ばかりでなく，その任意階の微分値に対しても同様の結果を導ける。

まず，その準備として，完全流体の非回転流れと変分問題について復習する。簡単のために，2 次元の場合を考える。2 次元空間 $R(x,y)$ の閉領域 Ω において，Ω の境界を $S=S_M+S_K$ とする。境界 S_M 上では速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ ϕ が指定され，境界 S_K 上では法線方向速度 $u_n=un_x+vn_y$ が指定される。$\mathbf{u}=(u,v)$ は流体の速度ﾍﾞｸﾄﾙであり，$\mathbf{n}=(n_x,n_y)$ は境界 S の外向き単位法線ﾍﾞｸﾄﾙを表わす。Ω 内の流体運動は，以下の境界値問題により表される。

力学的条件$[M]$:

$$u=\frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v=\frac{\partial\phi}{\partial y}\quad in\ \Omega \tag{6.5.1a}$$

$$\phi=g\quad on\ S_M \tag{6.5.1b}$$

運動学的条件$[K]$:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=h\quad in\ \Omega \tag{6.5.1c}$$

$$un_x+vn_y=f\quad on\ S_K \tag{6.5.1d}$$

ここで，g,h,f は既知量とする。

まず，この問題の変分問題について述べる。運動学的条件$[K]$の下で

$$0=\iint_\Omega\left[\left(u-\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\delta u+\left(v-\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\delta v\right]dxdy+\int_{S_M}(\phi-g)(\delta un_x+\delta vn_y)ds$$

$$= \iint_\Omega (u\delta u + v\delta v)dxdy + \iint_\Omega \phi\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y}\right)dxdy$$

$$-\int_{S_M} g\left(\delta u \cdot n_x + \delta v \cdot n_y\right)ds - \int_{S_K} \phi\left(\delta u n_x + \delta v n_y\right)ds$$

$$= \delta\left[\frac{1}{2}\iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right)dxdy - \int_{S_M} g\left(un_x + vn_y\right)ds\right] \tag{6.5.2}$$

を得る。したがって，Kelvin の原理

$$I[u,v] = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right)dxdy - \int_{S_M} g\left(un_x + vn_y\right)ds = \min$$

$$under\ [K] \tag{6.5.3}$$

が導かれる。

(6.5.3)式で与えられる変分問題において, Lagrange の未定乗数ϕを導入して運動学的条件$[K]$を緩和すると

$$I^*[u,v,\phi] = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right)dxdy - \int_{S_M} g\left(un_x + vn_y\right)ds$$

$$+ \iint_\Omega \phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - h\right)dxdy$$

$$- \int_{S_K} \phi\left(un_x + vn_y - f\right)ds = stationary \tag{6.5.4}$$

を得る。実際に停留条件を求めると

$$0 = \delta I^* = \iint_\Omega (u\delta u + v\delta v)dxdy - \int_{S_M} g\left(\delta u \cdot n_x + \delta v \cdot n_y\right)ds$$

$$+ \iint_\Omega \phi\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta v}{\partial y}\right)dxdy - \int_{S_K} \phi\left(\delta u \cdot n_x + \delta v \cdot n_y\right)ds$$

$$+ \iint_\Omega \delta\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - h\right)dxdy - \int_{S_K} \delta\phi\left(un_x + vn_y - f\right)ds$$

$$= \iint_\Omega \left[\left(u - \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)\delta u + \left(v - \frac{\partial \phi}{\partial y}\right)\delta v\right]dxdy$$

$$+ \int_{S_M} (\phi - g)\left(\delta u \cdot n_x + \delta v \cdot n_y\right)ds$$

$$+\iint_\Omega \delta\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-h\right)dxdy-\int_{S_K}\phi\left(un_x+vn_y-f\right)ds \qquad (6.5.5)$$

となるので，(6.5.3)式の変分問題の自然条件は，力学的条件$[M]$であることが分かる。

I^*を書き換えると，Hellinger-Reissner 型の変分原理

$$\begin{aligned}
J[u,v,\phi] &= I^*[u,v,\phi] \\
&= -\iint_\Omega\left[\frac{\partial\phi}{\partial x}u+\frac{\partial\phi}{\partial y}v-\frac{1}{2}\left(u^2+v^2\right)\right]dxdy \\
&\quad -\iint_\Omega h\phi dxdy+\int_{S_M}(\phi-g)\left(un_x+vn_y\right)ds+\int_{S_K}f\phi ds \\
&= stationary \qquad (6.5.6)
\end{aligned}$$

を得る。

(6.5.6)式で与えられる変分問題において，力学的条件$[M]$を拘束すると，Dirichlet の原理

$$\begin{aligned}
K[\phi] &= J[u,v,\phi]\big|_{under\ \ [M]} \\
&= -\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy-\iint_\Omega h\phi dxdy+\int_{S_K}f\phi ds \\
&= \max \\
&under\ [M]
\end{aligned} \qquad (6.5.7)$$

が求まる。停留条件を求めてみると

$$\begin{aligned}
0 &= -\iint_\Omega\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)dxdy-\iint_\Omega h\delta\phi dxdy+\int_{S_K}f\delta\phi ds \\
&= \iint_\Omega\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}-h\right)\delta\phi dxdy-\int_{S_K}\left(un_x+vn_y-f\right)\delta\phi ds \qquad (6.5.8)
\end{aligned}$$

であるので，運動学的条件$[K]$が自然条件である。変分問題(6.5.3)式と(6.5.7)式においては，拘束条件と自然条件が逆になっている。また，最小値問題が最大値問題になっている。

u,v,ϕが正解のとき

$$I[u,v]=\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy-\int_{S_M}g\left(un_x+vn_y\right)ds$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\phi dxdy+\frac{1}{2}\int_{S}\left(un_x+vn_y\right)\phi ds-\int_{S_M}g\left(un_x+vn_y\right)ds$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}h\phi dxdy-\frac{1}{2}\int_{S_M}g\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2}\int_{S_K}f\phi ds \tag{6.5.9a}$$

$$J[u,v,\phi]=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}u+\frac{\partial\phi}{\partial y}v\right)dxdy-\iint_{\Omega}h\phi dxdy+\int_{S_K}f\phi ds$$

$$=+\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)\phi dxdy$$

$$-\frac{1}{2}\int_{S}\left(un_x+vn_y\right)\phi ds-\iint_{\Omega}h\phi dxdy+\int_{S_K}f\phi ds$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}h\phi dxdy-\frac{1}{2}\int_{S}g\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2}\int_{S_K}f\phi ds \tag{6.5.9b}$$

$$K[\phi]=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left(u\frac{\partial\phi}{\partial x}+v\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy-\iint_{\Omega}h\phi dxdy+\int_{S_K}f\phi ds$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_{\Omega}h\phi dxdy-\frac{1}{2}\int_{S_M}g\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\frac{1}{2}\int_{S_K}f\phi ds \tag{6.5.9c}$$

となる。ここで

$$\langle\mathbf{h},\phi\rangle=-\iint_{\Omega}h\phi dxdy-\int_{S_M}g\frac{\partial\phi}{\partial n}ds+\int_{S_K}f\phi ds \tag{6.5.10}$$

とすると，正解u,v,ϕに対して

$$2I=2J=2K=\langle\mathbf{h},\phi\rangle \tag{6.5.11}$$

が成り立つ。

そこで，(6.5.3)式の変分問題の近似解をu^*,v^*とし，(6.5.7)式の変分問題の近似解をϕ^{**}とすると，$\langle\mathbf{h},\phi\rangle$の上下解の評価式

$$2K[\phi^{**}]\le 2K[\phi]=\langle\mathbf{h},\phi\rangle=2I[u,v]\le 2I[u^*,v^*] \tag{6.5.12}$$

を得る。(6.5.3)式および(6.5.7)式で与えられる変分問題が単なる停留問題である場合には，このような上下解の評価式は導けない。しかし，そのような場合にも$\langle\mathbf{h},\phi\rangle$は，汎関数$I$および$K$の停留値として計算できる。このことは，近似解$u^*,v^*$および$\phi^{**}$の精度が低くても，$\langle\mathbf{h},\phi\rangle$は精度良く計算できることを意味する。

つぎに，以下に示されるような二つの問題(問題1および問題2)を考える。すなわち，$i=1,2$として，問題iを以下のように定義する。

力学的条件$[M_i]$:

$$u_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial x}, \quad v_i = \frac{\partial \phi_i}{\partial y} \quad in\ \Omega \tag{6.5.13a}$$

$$\phi_i = g_i \quad on\ S_M \tag{6.5.13b}$$

運動学的条件$[K_i]$:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} = h_i \quad in\ \Omega \tag{6.5.13c}$$

$$u_i n_x + v_i n_y = f_i \quad on\ S_K \tag{6.5.13d}$$

(6.5.13)式より

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial v_i}{\partial y} - h_i \right) \phi_j\, dxdy \\ &= -\iint_\Omega \left(u_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x} + v_i \frac{\partial \phi_j}{\partial y} + h_i \phi_j \right) dxdy + \int_S \left(u_i n_x + v_i n_y \right) \phi_j\, ds \\ &= -\iint_\Omega \left(u_i u_j + v_i v_j \right) dxdy \\ &\quad - \iint_\Omega h_i \phi_j\, dxdy + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} g_j\, ds + \int_{S_K} f_i \phi_j\, ds \end{aligned} \tag{6.5.14}$$

を得る。書き直すと

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \left(u_i u_j + v_i v_j \right) dxdy \\ &\qquad = -\iint_\Omega h_i \phi_j\, dxdy + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_i}{\partial n} g_j\, ds + \int_{S_K} f_i \phi_j\, ds \end{aligned} \tag{6.5.15a}$$

となる。iとjを入れ替えると

$$\begin{aligned} &\iint_\Omega \left(u_j u_i + v_j v_i \right) dxdy \\ &\qquad = -\iint_\Omega h_j \phi_i\, dxdy + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_j}{\partial n} g_i\, ds + \int_{S_K} f_j \phi_i\, ds \end{aligned} \tag{6.5.15b}$$

を得る。これより，相反定理

$$-\iint_\Omega h_1 \phi_2\, dxdy + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_1}{\partial n} g_2\, ds + \int_{S_K} f_1 \phi_2\, ds$$

$$= -\iint_{\Omega} h_2\phi_1 dxdy + \int_{S_M} \frac{\partial \phi_2}{\partial n} g_1 ds + \int_{S_K} f_2\phi_1 ds \tag{6.5.16}$$

が導かれる。相反定理の意味するところは，流体力学の場合は直感的に理解し難いが，弾性学の場合には「1の系の力が2の系の変位にする仕事は，2の系の力が1の系の変位にする仕事に等しい。」という分かり易い意味を持つ。流体力学の場合でも，複数の物体を考えると直感的に理解しやすい。

(6.5.9)式を参考にして相反定理を変形する。すなわち，(6.5.16)式の左辺第 2 項と右辺第 2 項を入れ換えると

$$-\iint_{\Omega} h_1\phi_2 dxdy - \int_{S_M} g_1 \frac{\partial \phi_2}{\partial n} ds + \int_{S_K} f_1\phi_2 ds$$

$$= -\iint_{\Omega} h_2\phi_1 dxdy - \int_{S_M} g_2 \frac{\partial \phi_1}{\partial n} ds + \int_{S_K} f_2\phi_1 ds \tag{6.5.17}$$

となるが，これを作用定理と呼ぶことにする。(6.5.10)式の定義を拡張して

$$< \mathbf{h}_i, \phi_j > = -\iint_{\Omega} h_i\phi_j dxdy - \int_{S_M} g_i \frac{\partial \phi_j}{\partial n} ds + \int_{S_K} f_i\phi_j ds \tag{6.5.18}$$

とすると，作用定理は

$$\langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle = \langle \mathbf{h}_2, \phi_1 \rangle \tag{6.5.19}$$

と書ける。$\langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle$を作用積分と呼ぶことにする。

作用積分の上下界に対する評価式を求めてみよう。(6.5.19)式の線形性により

$$\begin{aligned}
&\langle \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j, \phi_i + \phi_j \rangle - \langle \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_j, \phi_i - \phi_j \rangle \\
&\quad = \langle \mathbf{h}_i, \phi_i \rangle + \langle \mathbf{h}_j, \phi_i \rangle + \langle \mathbf{h}_i, \phi_j \rangle + \langle \mathbf{h}_j, \phi_j \rangle \\
&\qquad - \langle \mathbf{h}_i, \phi_i \rangle + \langle \mathbf{h}_j, \phi_i \rangle + \langle \mathbf{h}_i, \phi_j \rangle - \langle \mathbf{h}_j, \phi_j \rangle \\
&\quad = 2\langle \mathbf{h}_j, \phi_i \rangle + 2\langle \mathbf{h}_i, \phi_j \rangle
\end{aligned} \tag{6.5.20}$$

が言える。(6.5.19)式を代入すると

$$\langle \mathbf{h}_i, \phi_j \rangle = \frac{1}{4}\left(\langle \mathbf{h}_i + \mathbf{h}_j, \phi_i + \phi_j \rangle - \langle \mathbf{h}_i - \mathbf{h}_j, \phi_i - \phi_j \rangle \right) \tag{6.5.21}$$

が成り立つ。

一方

$$u_{1(\pm)2} = u_1 \pm u_2, \quad v_{1(\pm)2} = v_1 \pm v_2, \quad \phi_{1(\pm)2} = \phi_1 \pm \phi_2 \tag{6.5.22}$$

と書くことにすると，線形の境界値問題であるから，(6.5.13)式よりこれらは以下の境界値問題の解である。

力学的条件$[M_{1(\pm)2}]$:

$$u_{1(\pm)2} = \frac{\partial \phi_{1(\pm)2}}{\partial x}, \quad v_{1(\pm)2} = \frac{\partial \phi_{1(\pm)2}}{\partial y} \quad in\ \Omega \tag{6.5.23a}$$

$$\phi_{1(\pm)2} = g_1 \pm g_2 \quad on\ S_M \tag{6.5.23b}$$

運動学的条件$[K_{1(\pm)2}]$:

$$\frac{\partial u_{1(\pm)2}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1(\pm)2}}{\partial y} = h_1 \pm h_2 \quad in\ \Omega \tag{6.5.23c}$$

$$u_{1(\pm)2} n_x + v_{1(\pm)2} n_y = f_1 \pm f_2 \quad on\ S_K \tag{6.5.23d}$$

(6.5.12)式より

$$\frac{1}{2} K[\phi_{1(\pm)2}{}^{**}] \le \frac{1}{4} \langle \mathbf{h}_1 \pm \mathbf{h}_2, \phi_1 \pm \phi_2 \rangle \le \frac{1}{2} I[u_{1(\pm)2}{}^{*}, v_{1(\pm)2}{}^{*}] \tag{6.5.24}$$

であるので

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} K[\phi_{1(+)2}{}^{**}] - \frac{1}{2} I[u_{1(-)2}{}^{*}, v_{1(-)2}{}^{*}] \\ &\le \langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle = \frac{1}{4} \langle \mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2, \phi_1 + \phi_2 \rangle - \frac{1}{4} \langle \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2, \phi_1 - \phi_2 \rangle \\ &\le \frac{1}{2} I[u_{1(+)2}{}^{*}, v_{1(+)2}{}^{*}] - \frac{1}{2} K[\phi_{1(-)2}{}^{**}] \end{aligned} \tag{6.5.25}$$

が言えることになる。

上述の議論の最も簡単な例として

$$h_1 = \delta(x-\xi)\delta(y-\eta), \ g_1 = 0, \ f_1 = 0 \tag{6.5.26a}$$

$$h_2 = h, \ g_2 = g, \ f_2 = f \tag{6.5.26b}$$

を考えると

$$\langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle = -\iint_\Omega \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\phi_2(x,y)\,dxdy = -\phi_2(\xi,\eta) \tag{6.5.27}$$

を得る。

(6.5.26)式の代わりに

$$h_1 = \delta'(x-\xi)\delta(y-\eta), \ g_1 = 0, \ f_1 = 0 \tag{6.5.28a}$$

$$h_2 = h, \ g_2 = g, \ f_2 = f \tag{6.5.28b}$$

を考えると

$$\langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle = -\iint_\Omega \delta'(x-\xi)\delta(y-\eta)\phi_2(x,y)\,dxdy$$

$$= \iint_\Omega \delta(x-\xi)\delta(y-\eta)\phi_{2x}(x,y)\,dxdy = \phi_{2x}(\xi,\eta) \qquad (6.5.29)$$

を得る。

つぎに，水中で運動する物体の連成流体力の問題を考えてみよう。左右揺れに対するﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを$\phi_1 = \phi_S$，上下揺れに対するﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを$\phi_2 = \phi_H$とすると

$$h_1 = 0,\ \ g_1 = 0,\ \ f_1 = n_x \qquad (6.5.30a)$$

$$h_2 = 0,\ \ g_2 = 0,\ \ f_2 = n_y \qquad (6.5.30b)$$

であり，上下揺れによる流体力の左右揺れ成分は

$$\int_{S_K} n_x \phi_H\, ds = \langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle \qquad (6.5.31)$$

である。したがって，(6.5.25)式より

$$\frac{1}{2}K[\phi_{S(+)H}{}^{**}] - \frac{1}{2}I[u_{S(-)H}{}^{*}, v_{S(-)H}{}^{*}]$$

$$\leq \int_{S_K} n_x \phi_H\, ds = \langle \mathbf{h}_1, \phi_2 \rangle$$

$$\leq \frac{1}{2}I[u_{S(+)H}{}^{*}, v_{S(+)H}{}^{*}] - \frac{1}{2}K[\phi_{S(-)H}{}^{**}] \qquad (6.5.32)$$

となる。ここで，$u_{S(\pm)H}{}^{*}$, $v_{S(\pm)H}{}^{*}$は(6.5.3)式より

$$I[u,v] = \frac{1}{2}\iint_\Omega \left(u^2 + v^2\right) dxdy = \min \qquad (6.5.33a)$$

under

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad (6.5.33b)$$

$$u n_x + v n_y = n_x (\pm) n_y \quad \text{on } S_K \qquad (6.5.33c)$$

の近似解であり，$\phi_{S(\pm)H}{}^{**}$は(6.5.7)式より

$$K[\phi] = -\frac{1}{2}\iint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + \int_{S_K} f\phi ds = \max \qquad (6.5.34)$$

の近似解である。

本節では，作用定理という考え方を導入して，連成流体力の変分表式および上下界評価式を求めた。これは，Treffz[6.1]や Greenberg[6.2]および Cooperman[6.3]の理論の新しい観点からの拡張になっている。

§6.6　参考文献

[6.1] E. Treffz, Verhdl. d.2.Int. Kongr. für Technische Mechanik, Zürich, (1927).

[6.2] H. J. Greenberg, J. Math. Phys., Vol. 27, (1948), p.161.

[6.3] P. Cooperman, Quat. Appl. Math., Vol. 10, (1953), p.359.

[6.4] 林毅，村外志夫，「変分法」，応用数学講座第 13 巻，ｺﾛﾅ社，(1958).