§6.4　変分問題の共役性

まず, 変分問題ではなくて, 多変数関数の最小値問題を考えてみよう。N 次元空間 $R(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ で定義された R 個の拘束条件付のついた多変数関数の最小値問題を

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_N) = \min \tag{6.4.1a}$$

under

$$g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) = 0, \quad (r = 1,2,\cdots, R < N) \tag{6.4.1b}$$

とする。

(6.4.1)式で与えられる最小値問題は, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R$ を Lagrange の未定乗数とすると

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_N) - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) = stationary \tag{6.4.2}$$

に変換される。停留条件を求めると

$$0 = \frac{\partial f}{\partial y_n} - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r \frac{\partial g_r}{\partial y_n}, \quad (n = 1,2,\cdots, N) \tag{6.4.3}$$

で与えられる。

この式を $y_1, y_2, \cdots, y_N$ について

$$y_n = y_n(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R), \quad (n = 1,2,\cdots, N) \tag{6.4.4}$$

と解けたとして, これを $f(y_1, y_2, \cdots, y_N)$ に代入すると

$$\begin{aligned} & h(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R) \\ & = f(y_1(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R), y_2(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R), \cdots, y_N(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R)) \\ & \quad - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R), y_2(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R), \cdots, y_N(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_R)) \\ & = stationary \end{aligned} \tag{6.4.5}$$

という停留値問題を得る。

最小値問題(6.4.1)式で求まる f の最小値を d とし, (6.4.3)式において $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R$ を固定したときに(6.4.3)式が最小値問題であると仮定したときに得られる $f - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r$ の最小値を d_λ としよう。すなわち

$$d = \min_{\mathbf{y}\ \&\ g=0}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N)\right] \tag{6.4.6a}$$

$$d_\lambda = \min_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}=given}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N) - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) \right]$$
$$= h(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R) \tag{6.4.6b}$$

とする。このとき

$$d_\lambda = \min_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}=given}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N) - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) \right]$$
$$\leq \min_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}=given\ \&\ g=0}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N) - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) \right] \tag{6.4.7a}$$

および

$$\min_{\mathbf{y};\boldsymbol{\lambda}=given\ \&\ g=0}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N) - \sum_{r=1}^{R} \lambda_r g_r(y_1, y_2, \cdots, y_N) \right]$$
$$= \min_{\mathbf{y}\ \&\ g=0}\left[f(y_1, y_2, \cdots, y_N)\right] = d \tag{6.4.7b}$$

であるので

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R) = d_\lambda \leq d \tag{6.4.8}$$

がいえる。

(6.4.3)式と(6.4.1b)式の解を $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N$, $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, \hat{\lambda}_R$ とすると

$$d = f(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \cdots, \hat{y}_N) = d_{\hat{\lambda}} = h(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \cdots, \hat{\lambda}_R) \tag{6.4.9}$$

が成り立つ。故に，(6.4.5)式は最大値問題

$$h(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_R) = \max \tag{6.4.10}$$

で，その最大値は最小値問題(6.4.1)式の最小値に等しい。

また，(6.4.10)式の停留条件を求めると

$$0 = \frac{\partial h}{\partial \lambda_r} = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \sum_{s=1}^{R} \lambda_s \frac{\partial g}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial \lambda_r} - g_r$$
$$= -g_r, \quad (r = 1, 2, \cdots, R) \tag{6.4.11}$$

となる。ここで，(6.4.3)式が用いられている。(6.4.11)式は，(6.4.1b)式に外ならない。(6.4.1)式の最小値問題と(6.4.11)式の最小値問題では，拘束条件と自然条件が入れ代わっていることが分かる。

つぎに，変分問題の場合について考えてみよう。そこで，§6.1 で述べ

た変分問題

$$I[\phi]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,\phi,\phi')\,dx=\min \tag{6.4.12a}$$

under

$$\phi(x_a)=\phi_a, \quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.4.12b}$$

について考える。さらに，この変分問題が最小値問題であるとする。

(6.1.12)式の変分問題を，Lagrange の未定乗数 p を用いて，書き直して得られる変分問題

$$I^*[\phi,u,p]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,\phi,u)\,dx-\int_{x_a}^{x_b}p(u-\phi')\,dx$$

$$-p(x_b)[\phi(x_b)-\phi_b]+p(x_a)[\phi(x_a)-\phi_a]=stationary \tag{6.4.13}$$

の停留条件(自然条件)を求めると

$$p'=F_\phi, \quad p=F_u, \quad u=\phi', \quad x_a<x<x_b \tag{6.4.14a}$$

$$\phi(x_a)=\phi_a, \quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.4.14b}$$

である。

§6.1 では，2 段階に分けて Legendre 変換を行っているが，ここでは一気に行うことにする。すなわち

$$p'=F_\phi, \quad p=F_u \tag{6.4.15a}$$

$$G=G(x,p,p')=p'\phi+pu-F(x,\phi,u) \tag{6.4.15b}$$

という変換を考える。この変分問題は

$$K[p]=I^*[\phi,u,p]\Big|_{(6.4.15)}$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left[p\phi'+p'\phi-p'\phi-pu+F(x,\phi,u)\right]dx$$

$$-p(x_b)[\phi(x_b)-\phi_b]+p(x_a)[\phi(x_a)-\phi_a]$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left[p\phi'+p'\phi-G(x,p,p')\right]dx$$

$$-p(x_b)[\phi(x_b)-\phi_b]+p(x_a)[\phi(x_a)-\phi_a]$$

$$=-\int_{x_a}^{x_b}G(x,p,p')\,dx+p(x_b)\phi_b-p(x_a)\phi_a=stationary \tag{6.4.16}$$

となる。

最小値問題(6.4.12)式で求まる I の最小値を d とし，(6.4.13)式において

p を固定したときに, (6.4.13)式が最小値問題であると仮定したときに得られる I^* の最小値を d_p としよう。すなわち

$$d = \min_{\phi}\left[I[\phi]\right] \tag{6.4.17a}$$

$$d_p = \min_{\phi;p=given}\left[I^*[\phi,u,p]\right] = K[p] \tag{6.4.17b}$$

とする。このとき

$$d_p = \min_{\phi;p=given}\left[I^*[\phi,u,p]\right]$$

$$\leq \min_{\phi;p=given\ \&\ u=\phi',\phi(x_a)=\phi_a,\phi(x_b)=\phi_b}\left[I^*[\phi,u,p]\right] \tag{6.4.18a}$$

および

$$\min_{\phi;p=given\ \&\ u=\phi',\phi(x_a)=\phi_a,\phi(x_b)=\phi_b}\left[I^*[\phi,u,p]\right] = \min_{\phi}\left[I[\phi]\right] = d \tag{6.4.18b}$$

であるので

$$K[p] = d_p \leq d \tag{6.4.19}$$

がいえる。

(6.4.14)式の解を $\hat{\phi},\hat{u},\hat{p}$ とすると

$$d = I[\hat{\phi}] = d_{\hat{p}} = K[\hat{p}] \tag{6.4.20}$$

が成り立つ。故に，(6.4.16)式は最大値問題

$$K[p] = -\int_{x_a}^{x_b} G(x,p,p')\,dx + p(x_b)\phi_b - p(x_a)\phi_a = \max \tag{6.4.21}$$

で，その最大値は最小値問題(6.4.12)式の最小値に等しい。

変分問題(6.4.12)式と(6.4.21)式では，自然条件と拘束条件が逆になっていることは，§6.1 において既に示された。