§6.3　多次元の問題

多次元の場合の例として，変関数が 1 階の導関数を有する問題について述べる。2 次元空間 $R(x, y)$ の閉領域 Ω で定義された関数 ϕ について，変分問題

$$I[\phi] = \iint_\Omega F(x, y, \phi, \phi_x, \phi_y)\,dxdy - \int_{\Gamma_{\phi_n}} f\phi ds = stationary \qquad (6.3.1a)$$

under

$$\phi = g \quad on\ \Gamma_\phi \qquad (6.3.1b)$$

を考えよう。ここで，ϕ_x は $\partial\phi/\partial x$，Γ_ϕ は ϕ が指定される Ω の境界 Γ の一部，Γ_{ϕ_n} は $\Gamma - \Gamma_\phi$，　n は Γ の外向き法線を表わす。この変分問題の自然条件は

$$(F_{\phi_x})_x + (F_{\phi_y})_y = F_\phi \quad in\ \Omega \qquad (6.3.2a)$$

$$F_{\phi_x} n_x + F_{\phi_y} n_y = f \quad on\ \Gamma_{\phi_n} \qquad (6.3.2b)$$

で与えられる。これを書き直すと

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y \quad in\ \Omega \qquad (6.3.3a)$$

$$(F_u)_x + (F_v)_y - F_\phi = 0 \quad in\ \Omega \qquad (6.3.3b)$$

$$F_u n_x + F_v n_y = f \quad on\ \Gamma_u \qquad (6.3.3c)$$

となる。変分問題(6.1.1)式も

$$I[\phi, u, v] = \iint_\Omega F(x, y, \phi, u, v)\,dxdy - \int_{\Gamma_u} f\phi ds = stationary \qquad (6.3.4a)$$

under

$$\phi = g \quad on\ \Gamma_\phi \qquad (6.3.4b)$$

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y \quad in\ \Omega \qquad (6.3.4c)$$

と書ける。この変分問題の自然条件は，(6.3.3b~3c)式である。

事実，(6.3.4)式の変分問題において，Lagrange の未定乗数 p, q により，付帯条件(6.3.4b～4c)式を緩和して得られる変分問題

$$I^*[\phi, u, v, p, q] = \iint_\Omega F(x, y, \phi, u, v)\,dxdy - \int_{\Gamma_u} f\phi ds$$

$$- \iint_\Omega \left[p(u - \phi_x) + q(v - \phi_y)\right] dxdy - \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y)(\phi - g)\,ds$$

$$= stationary \qquad (6.3.5)$$

の停留条件を求めると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta I^* &= \iint_\Omega (F_\phi \delta\phi + F_u \delta u + F_u \delta u)dxdy - \int_{\Gamma_u} f\delta\phi ds \\
&- \iint_\Omega \left[p(\delta u - \delta\phi_x) + q(\delta v - \delta\phi_y)\right]dxdy - \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y)\delta\phi ds \\
&- \iint_\Omega \left[\delta p\cdot(u-\phi_x) + \delta q\cdot(v-\phi_y)\right]dxdy - \int_{\Gamma_\phi} (\delta p\cdot n_x + \delta q\cdot n_y)(\phi - g)ds \\
&= \iint_\Omega (F_\phi - p_x - q_y)\,\delta\phi dxdy + \iint_\Omega \left[(F_u - p)\delta u + (F_v - q)\delta v\right]dxdy \\
&+ \int_{\Gamma_u} (pn_x + qn_y - f)\delta\phi ds - \iint_\Omega \left[\delta p\cdot(u-\phi_x) + \delta q\cdot(v-\phi_y)\right]dxdy \\
&- \int_{\Gamma_\phi} (\delta p\cdot n_x + \delta q\cdot n_y)(\phi - g)ds
\end{aligned}
\tag{6.3.6}
$$

で与えられる。したがって，この変分問題の自然条件は

$$p_x + q_y - F_\phi = 0 \quad in\ \Omega \tag{6.3.7a}$$

$$p = F_u, \quad q = F_v \quad in\ \Omega \tag{6.3.7b}$$

$$pn_x + qn_y = f \quad on\ \Gamma_u \tag{6.3.7c}$$

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y \quad in\ \Omega \tag{6.3.7d}$$

$$\phi = g \quad on\ \Gamma_\phi \tag{6.3.7e}$$

であるので，(6.3.3)式がいえる。

(6.3.7a)式と(6.3.7d)式は互いに共役な条件であり, (6.3.7b)式は共役変数 p と u の仲介をする条件である。膜の撓みの問題を論じた§4 においては, (6.3.7a)式を力学的条件(mechanical condition), (6.3.7d)式を運動学的条件(kinematical condition), (6.3.7b)式を橋渡し的条件(bridge condition)と呼んだ。しかし，数学的に同じ構造をした二つの問題，例えば，膜の撓みの問題と完全流体の渦なし流れの問題においては，力学的条件と運動学的条件が入れ代わっている。したがって，力学的，運動学的などの言葉を離れて，(6.3.7a)式を単に$[M]$条件，(6.3.7d)式を$[K]$条件，(6.3.7b)式を$[M-K]$条件と呼ぶのが良いであろう。(6.3.7e)式の境界条件も$[K]$条件の 1 部である。また，(6.3.4)式の変分問題は，$[K]$を拘束条件として，$[M]$を自然条件として与える変分問題である.

(6.3.5)式の変分問題において, (6.3.7b)式, すなわち上で述べた$[M-K]$条件を拘束する Legendre 変換

$$p = F_u, \quad q = F_v \tag{6.3.8a}$$
$$H = H(x, y, \phi, p, q) = pu + qv - F(x, y, \phi, u, v) \tag{6.3.8b}$$

を行うと，この変分問題は

$$J[\phi, p, q] = I^*[\phi, u, v, p, q]\Big|_{(6.3.8)} = \iint_\Omega \left[p\phi_x + q\phi_y - H(x, y, \phi, p, q)\right] dxdy$$

$$-\int_{\Gamma_u} f\phi ds - \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y)(\phi - g) ds = stationary \tag{6.3.9}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$0 = \delta J = \iint_\Omega (p\delta\phi_x + q\delta\phi_y + \delta p \cdot \phi_x + \delta q \cdot \phi_y - H_\phi \delta\phi - H_p \delta p - H_q \delta q) dxdy$$

$$-\int_{\Gamma_u} f\delta\phi ds - \int_{\Gamma_\phi} (\delta p \cdot n_x + \delta q \cdot n_y)(\phi - g) ds - \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y)\delta\phi \, ds$$

$$= -\iint_\Omega (p_x + q_y + H_\phi)\delta\phi \, dxdy$$

$$+ \iint_\Omega \left[(\phi_x - H_p)\delta p + (\phi_y - H_q)\delta q\right] dxdy$$

$$+ \int_{\Gamma_u} (pn_x + qn_y - f)\delta\phi \, ds - \int_{\Gamma_\phi} (\delta p \cdot n_x + \delta q \cdot n_y)(\phi - g) ds \tag{6.3.10}$$

となる。したがって，自然条件は

$$p_x + q_y = -H_\phi \quad in \ \Omega \tag{6.3.11a}$$
$$\phi_x = H_p, \quad \phi_y = H_q, \quad in \ \Omega \tag{6.3.11b}$$
$$pn_x + qn_y = f \quad on \ \Gamma_u \tag{6.3.11c}$$
$$\phi = g \quad on \ \Gamma_\phi \tag{6.3.11d}$$

である。2 次元の場合は見慣れない形になるが，x, y を時間と考えれば，(6.3.11a)式は解析力学における正準方程式(canonical equation)に外ならない。

(6.3.8b)式より

$$dH(x, y, \phi, p, q) = pdu + qdv + udp + vdq$$
$$- F_x dx - F_y dy - F_\phi d\phi - F_u du - F_v dv$$
$$= +udp + vdq - F_x dx - F_y dy - F_\phi d\phi \tag{6.3.12}$$

であるので

$$H_x = -F_x, \quad H_x = -F_x, \quad H_\phi = -F_\phi, \quad H_p = u, \quad H_q = v \tag{6.3.13}$$

がいえるので，(6.3.11a)式は$[K]$条件，(6.3.11b)式は$[M]$条件外ならない。

さらに，(6.1.9)式の変分問題において，上で述べた$[M]$条件を拘束するLegendre 変換

$$p_x + q_y = -H_\phi \tag{6.3.14a}$$

$$G = G(x, y, p, q, p_x + q_y) = (p_x + q_y)\phi + H(x, y, \phi, p, q) \tag{6.3.14b}$$

を行うと，この変分問題は

$$K[p, q] = J[\phi, p, q]\big|_{(6.3.14)}$$

$$= \iint_\Omega \left[p\phi_x + q\phi_y + (p_x + q_y)\phi - G(x, y, p, q, p_x + q_y) \right] dxdy$$

$$- \int_{\Gamma_u} f\phi ds - \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y)(\phi - g) ds = stationary$$

$$= -\iint_\Omega G(x, y, p, q, p_x + q_y) dxdy$$

$$+ \int_{\Gamma_\phi} (pn_x + qn_y) g ds = stationary \tag{6.3.15a}$$

under

$$pn_x + qn_y = f \quad on\ \Gamma_u \tag{6.3.15b}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$0 = \delta K = -\iint_\Omega \left[G_p \delta p + G_q \delta q + G_{p_x+q_y} \delta(p_x + q_y) \right] dxdy$$

$$+ \int_{\Gamma_\phi} (\delta p \cdot n_x + \delta q \cdot n_y) g ds$$

$$= -\iint_\Omega \left\{ \left[G_p - (G_{p_x+q_y})_x \right] \delta p + \left[G_q - (G_{p_x+q_y})_y \right] \delta q \right\} dxdy$$

$$- \int_{\Gamma_\phi} (\delta p \cdot n_x + \delta q \cdot n_y)(G_{p_x+q_y} - g) ds \tag{6.3.16}$$

となる。したがって，自然条件は

$$G_p = (G_{p_x+q_y})_x, \quad G_q = (G_{p_x+q_y})_y \quad in\ \Omega \tag{6.3.17a}$$

$$G_{p_x+q_y} = g \quad on\ \Gamma_\phi \tag{6.3.17b}$$

で与えられる。

一方，(6.3.14b)式より

$$dG(t,p,p') = (p_x + p_y)d\phi + \phi\, d(p_x + p_y)$$
$$+ H_x dx + H_y dy + H_\phi d\phi + H_p dp + H_q dq$$
$$= \phi\, d(p_x + p_y) + H_x dx + H_y dy + H_p dp + H_q dq \qquad (6.3.18)$$

であるので

$$G_x = H_x, \quad G_y = H_y, \quad G_p = H_p, \quad G_q = H_q, \quad G_{p_x+q_y} = \phi \qquad (6.3.19)$$

がいえるので,(6.3.15)式の変分問題の自然条件となっている(6.3.17a)式は,変分問題(6.3.4)式の拘束条件であった(6.3.3a)式に外ならない。境界条件(6.3.17b)式も，この変分問題の拘束条件であったことは言うまでもなかろう。このように，変分問題(6.3.4)式と(6.3.15)式では，自然条件と拘束条件が逆になっている。

[例 6.3.1]　簡単な例をあげて具体的に見てみよう。荷重 f が作用する張力 T_0 で張られた膜のたわみについて考える。膜は2次元空間 $R(x,y)$ の閉領域 Ω にあり，その境界を $\Gamma = \Gamma_\phi$ とする。膜の単位面積当たりのﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ $F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)$ は

$$F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y) = \frac{1}{2}T_0(\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2) - f\phi \qquad (6.3.20)$$

であり，この場合の変分原理(6.3.1)式はﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理により

$$I[\phi] = \iint_\Omega F(x,y,\phi,\phi_x,\phi_y)\,dxdy$$
$$= \iint_\Omega \left[\frac{1}{2}T_0(\phi_x{}^2 + \phi_y{}^2) - f\phi\right] dxdy = \min \qquad (6.3.21a)$$

under

$$\phi = 0, \quad on\ \Gamma \qquad (6.3.22b)$$

で与えられる。この変分問題の自然条件は，(6.3.2)式より

$$T_0(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = -f, \quad in\ \Omega \qquad (6.3.23)$$

で与えられる。

(6.3.3a)式を用いて ϕ_x, ϕ_y を u, v で置きかえると

$$F(x,y,\phi,u,v) = \frac{1}{2}T_0(u^2 + v^2) - f\phi \qquad (6.3.24)$$

となり，(6.3.4)式の変分問題は

$$I[\phi,u,v] = \iint_\Omega F(x,y,\phi,u,v)\,dxdy$$

$$= \iint_\Omega \left[\frac{1}{2} T_0 (u^2 + v^2) - f\phi \right] dxdy = \min \qquad (6.3.25a)$$

under

$$\phi = 0, \quad on\ \Gamma \qquad (6.3.25b)$$

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y \quad in\ \Omega \qquad (6.3.25c)$$

となる。

(6.3.8)式で与えられる Legendre 変換

$$p = F_u = T_0 u, \quad q = F_v = T_0 v \qquad (6.3.26a)$$

$$H = H(x, y, \phi, p, q) = pu + qv - F(x, y, \phi, u, v)$$

$$= \frac{1}{2T_0}(p^2 + q^2) + f\phi \qquad (6.3.26b)$$

を考えると，(6.3.9)式の変分問題は

$$J[\phi, p, q] = \iint_\Omega \left[p\phi_x + q\phi_y - H(x, y, \phi, p, q) \right] dxdy - \int_\Gamma (pn_x + qn_y)\phi ds$$

$$= \iint_\Omega \left[p\phi_x + p\phi_y - \frac{1}{2T_0}(p^2 + q^2) - f\phi \right] dxdy - \int_\Gamma (pn_x + qn_y)\phi ds$$

$$= stationary \qquad (6.3.27)$$

となり，この変分問題の自然条件は(6.3.11)式より

$$p_x + q_y = -f \quad in\ \Omega \qquad (6.3.28a)$$

$$\phi_x = H_p = \frac{p}{T_0}, \quad \phi_y = H_q = \frac{q}{T_0} \quad in\ \Omega \qquad (6.3.28a)$$

$$\phi = 0 \quad on\ \Gamma \qquad (6.3.28c)$$

となる。

さらに，もう一度(6.3.14)式で与えられる Legendre 変換

$$p_x + q_y = -f \quad in\ \Omega \qquad (6.3.29a)$$

$$G = G(x, p, q, p_x + q_y) = (p_x + q_y)\phi + H(x, y, \phi, p, q)$$

$$= \frac{1}{2T_0}(p^2 + q^2) \qquad (6.3.29b)$$

を行うと，(6.3.15)式の変分問題は

$$K[p, q] = -\iint_\Omega G(x, y, p, q, p_x + q_y) dxdy$$

$$= -\iint_{\Omega} \frac{1}{2T_0}(p^2 + q^2)dxdy = \max \qquad (6.3.30a)$$

under

$$p_x + q_y = -f \quad in\ \Omega \qquad (6.3.30b)$$

となる。ただし，この変分問題の拘束条件は，(6.3.29a)式から来ている。この変分問題の自然条件は, ϕ を Lagrange の乗数として拘束条件(6.3.30b)式を緩和した変分問題

$$K^*[p,q,\phi] = -\iint_{\Omega} \frac{1}{2T_0}(p^2 + q^2)dxdy - \iint_{\Omega} \phi(p_x + q_y + f)dxdy$$

$$= stationary \qquad (6.3.31)$$

を考えることにより与えられる。すなわち

$$0 = \delta K^* = -\iint_{\Omega} \frac{1}{T_0}(p\delta p + q\delta q)dxdy$$

$$-\iint_{\Omega} \phi\delta(p_x + q_y)dxdy - \iint_{\Omega} \delta\phi \cdot (p_x + q_y + f)dxdy$$

$$= -\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{p}{T_0} - \phi_x \right) \delta p + \left(\frac{q}{T_0} - \phi_y \right) \delta q \right] dxdy - \iint_{\Omega} \delta\phi \cdot (p_x + q_y + f)dxdy$$

$$-\int_{\Gamma} \phi(\delta p \cdot n_x + \delta q \cdot n_y)ds \qquad (6.3.32)$$

であるので，(6.3.30)式の変分問題の自然条件は

$$p = T_0\phi_x, \quad q = T_0\phi_y \quad in\ \Omega \qquad (6.3.33a)$$

および

$$\phi = 0 \quad on\ \Gamma \qquad (6.3.25b)$$

である。(6.3.26a)式と併せて考えると，(6.3.33)式の条件は

$$u = \phi_x, \quad v = \phi_y \quad in\ \Omega \qquad (6.3.25c)$$

に外ならない。(6.3.25)式の最小値問題が，(6.3.30)式の最大値問題になったこと，およびこの二つの変分問題において，自然条件と拘束条件が入れ替わっていることに注意して欲しい。前者については，§6.4 において詳しく説明する。