§6.2　1 次元の問題(変関数に 2 階の導関数が含まれる場合)

つぎに，変関数が 2 階の導関数を含む 1 次元の問題について述べる。変分問題

$$I[\phi]=\int_{x_a}^{x_b} F(x,\phi,\phi',\phi'')\,dx = stationary \tag{6.2.1a}$$

under

$$\phi(x_a)=\phi_a, \quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.2.1b}$$

$$\phi'(x_a)=\phi'_a, \quad \phi'(x_b)=\phi'_b \tag{6.2.1c}$$

について考えよう。ここで，ϕ', ϕ'' は $d\phi/dx,\ d^2\phi/dx^2$ を表わす。この変分問題の Euler の方程式は

$$(F_{\phi''})''-(F_{\phi'})'+F_{\phi}=0, \quad x_a<x<x_b \tag{6.2.2}$$

で与えられる。これを書き直すと

$$u_1=\phi', \quad u_2=\phi'', \quad x_a<x<x_b \tag{6.2.3a}$$

$$(F_{u_2})''-(F_{u_1})'+F_{\phi}=0, \quad x_a<x<x_b \tag{6.2.3b}$$

となる。変分問題(6.2.1)式も

$$I[\phi,u_1,u_2]=\int_{x_a}^{x_b} F(x,\phi,u_1,u_2)\,dx = stationary \tag{6.2.4a}$$

under

$$\phi(x_a)=\phi_a, \quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.2.4b}$$

$$\phi'(x_a)=\phi'_a, \quad \phi'(x_b)=\phi'_b \tag{6.2.4c}$$

$$u_1=\phi', \quad u_2=\phi'', \quad x_a<x<x_b \tag{6.2.4d}$$

と書ける。この変分問題の自然条件は，(6.2.3b)式である。

事実, (6.2.4)式の変分問題において, Lagrange の未定乗数 $p_1,\ p_2$ により, 付帯条件(6.1.4b～4d)式を緩和すると，変分問題

$$\begin{aligned}
I^*[\phi,u_1,u_2,p_1,p_2] &= \int_{x_a}^{x_b} F(x,\phi,u_1,u_2)\,dx \\
&-\int_{x_a}^{x_b}[p_1(u_1-\phi')+p_2(u_2-\phi'')]\,dx \\
&-[p_1(x_b)-p'_2(x_b)][\phi(x_b)-\phi_b]+[p_1(x_a)-p'_2(x_a)][\phi(x_a)-\phi_a] \\
&-p_2(x_b)[\phi'(x_b)-\phi'_b]+p_2(x_a)[\phi'(x_a)-\phi'_a]=stationary
\end{aligned} \tag{6.2.5}$$

が得られる。中間の式の境界値に関する項が複雑であるが, $p_1(x_b)-p'_2(x_b),\ p_1(x_a)-p'_2(x_a)$ および $p_2(x_b),\ p_2(x_a)$ の代わりに，

$\lambda_1(x_b), \lambda_1(x_a)$ および $\lambda_2(x_b), \lambda_2(x_a)$ と置けば，同じ結果になる。この変分問題の停留条件を求めると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta I^* &= \int_{x_a}^{x_b} (F_\phi \delta\phi + F_{u_1} \delta u_1 + F_{u_2} \delta u_2) dx \\
&\quad - \int_{x_a}^{x_b} [p_1(\delta u_1 - \delta\phi') + p_2(\delta u_2 - \delta\phi'')] dx \\
&\quad - [p_1(x_b) - p_2'(x_b)]\delta\phi(x_b) + [p_1(x_a) - p_2'(x_a)]\delta\phi(x_a) \\
&\quad - p_2(x_b)\delta\phi'(x_b) + p_2(x_a)\delta\phi'(x_a) \\
&\quad - \int_{x_a}^{x_b} [\delta p_1 \cdot (u_1 - \phi') + \delta p_2 \cdot (u_2 - \phi'')] dx \\
&\quad - [\delta p_1(x_b) - \delta p_2'(x_b)][\phi(x_b) - \phi_b] + [\delta p_1(x_a) - \delta p_2'(x_a)][\phi(x_a) - \phi_a] \\
&\quad - \delta p_2(x_b)[\phi'(x_b) - \phi_b'] + \delta p_2(x_a)[\phi'(x_a) - \phi_a'] \\
&= \int_{x_a}^{x_b} [(p_2'' - p_1' + F_\phi)\delta\phi - (p_1 - F_{u_1})\delta u_1 - (p_2 - F_{u_2})\delta u_2] dx \\
&\quad - \int_{x_a}^{x_b} [\delta p_1 \cdot (u_1 - \phi') + \delta p_2 \cdot (u_2 - \phi'')] dx \\
&\quad - [\delta p_1(x_b) - \delta p_2'(x_b)][\phi(x_b) - \phi_b] + [\delta p_1(x_a) - \delta p_2'(x_a)][\phi(x_a) - \phi_a] \\
&\quad - \delta p_2(x_b)[\phi'(x_b) - \phi_b'] + \delta p_2(x_a)[\phi'(x_a) - \phi_a']
\end{aligned}
\tag{6.2.6}
$$

で与えられる。したがって，この変分問題の自然条件は

$$p'' - p' + F_\phi = 0, \quad p_1 = F_{u_1}, \quad p_2 = F_{u_2}, \quad x_a < x < x_b \tag{6.2.7a}$$

$$u_1 = \phi', \quad u_2 = \phi'', \quad x_a < x < x_b \tag{6.2.7b}$$

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \tag{6.2.7b}$$

$$\phi'(x_a) = \phi_a', \quad \phi'(x_b) = \phi_b' \tag{6.2.7d}$$

であるので，(6.2.3)式がいえる。

変関数が 2 階の導関数を持つ本節の場合には，(6.2.7a)式の第 1 式と(6.2.7b)式は互いに共役な条件であり，(6.2.7a)式の第 2 式と第 3 式は共役変数 p_1, p_2 と u_1, u_2 の仲介をする条件である。§6.1 ですでに述べたことの繰り返しになるが，力学的な問題を論じた§4 においては，(6.2.7a)式の第 1 式を力学的条件(mechanical condition)，(6.2.7b)式を運動学的条件(kinematical condition), (6.2.7a)式の第 2 式と第 3 式を物性学的あるいは橋渡し的条件(property or bridge condition)と呼んだ。しかし，数学的に同じ構造をした二つの問題，例えば，膜の撓みの問題と完全流体の渦なし

流れの問題においては，力学的条件と運動学的条件が入れ代わっている。したがって，力学的，運動学的などの言葉を離れて，(6.2.7a)式の第 1 式を単に$[M]$条件，(6.2.7b)式を$[K]$条件，(6.2.7a)式の第 2 式と第 3 式を$[M-K]$条件と呼ぶのが良いであろう。(6.2.7c～7d)式の境界条件も$[K]$条件の 1 部である。また, (6.2.4)式の変分問題は, $[K]$を拘束条件として, $[M]$を自然条件として与える変分問題である.

(6.2.5)式の変分問題において, (6.2.7a)式の第 2 式と第 3 式, すなわち上で述べた$[M-K]$条件を拘束する Legendre 変換

$$p_1 = F_{u_1}, \quad p_2 = F_{u_2} \tag{6.2.8a}$$

$$H = H(x,\phi,p_1,p_2) = p_1 u_1 + p_2 u_2 - F(x,\phi,u_1,u_2) \tag{6.2.8b}$$

を行うと，この変分問題は

$$J[\phi,p_1,p_2] = I^*[\phi,u_1,u_2,p_1,p_2]\Big|_{(6.2.8)}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left[p_1\phi' + p_2\phi'' - H(x,\phi,p_1,p_2)\right]dx$$

$$-[p_1(x_b) - p_2'(x_b)][\phi(x_b) - \phi_b] + [p_1(x_a) - p_2'(x_a)][\phi(x_a) - \phi_a]$$

$$-p_2(x_b)[\phi'(x_b) - \phi_b'] + p_2(x_a)[\phi'(x_a) - \phi_a'] = stationary \tag{6.2.9}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$0 = \delta J = \int_{x_a}^{x_b} \left[p_1\delta\phi' + p_2\delta\phi'' + \delta p_1 \cdot \phi' + \delta p_2 \cdot \phi'' - H_\phi \delta\phi - H_{p_1}\delta p_1 - H_{p_2}\delta p_2\right]dx$$

$$-[p_1(x_b) - p_2'(x_b)]\delta\phi(x_b) + [p_1(x_a) - p_2'(x_a)]\delta\phi(x_a)$$

$$-p_2(x_b)\delta\phi'(x_b) + p_2(x_a)\delta\phi'(x_a)$$

$$-[\delta p_1(x_b) - \delta p_2'(x_b)][\phi(x_b) - \phi_b] + [\delta p_1(x_a) - \delta p_2'(x_a)][\phi(x_a) - \phi_a]$$

$$-\delta p_2(x_b)[\phi'(x_b) - \phi_b'] + \delta p_2(x_a)[\phi'(x_a) - \phi_a']$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left[(p_2'' - p_1' - H_\phi)\delta\phi + (\phi' - H_{p_1})\delta p_1 + (\phi'' - H_{p_2})\delta p_2\right]dx$$

$$-[\delta p_1(x_b) - \delta p_2'(x_b)][\phi(x_b) - \phi_b] + [\delta p_1(x_a) - \delta p_2'(x_a)][\phi(x_a) - \phi_a]$$

$$-\delta p_2(x_b)[\phi'(x_b) - \phi_b'] + \delta p_2(x_a)[\phi'(x_a) - \phi_a'] \tag{6.2.10}$$

となる。したがって，自然条件は

$$\phi' = H_{p_1}, \quad \phi'' = H_{p_2}, \quad p_2'' - p_1' = H_\phi, \quad x_a < x < x_b \tag{6.2.11a}$$

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \tag{6.2.11b}$$

$$\phi'(x_a) = \phi_a', \quad \phi'(x_b) = \phi_b' \tag{6.2.11c}$$

である。

(6.2.8)式より

$$dH(x,\phi,p_1,p_2) = p_1 du_1 + p_2 du_2 + u_1 dp_1 + u_2 dp_2$$
$$- F_x dx - F_\phi d\phi - F_{u_1} du_1 - F_{u_2} du_2$$
$$= -F_x dx - F_\phi d\phi + u_1 dp_1 + u_2 dp_2 \tag{6.2.12}$$

であるので

$$H_x = -F_x, \quad H_\phi = -F_\phi, \quad H_{p_1} = u_1, \quad H_{p_2} = u_2 \tag{6.2.13}$$

がいえるので，(6.1.11a)式の第 1 式と第 2 式は$[K]$条件，第 3 式は$[M]$条件外ならない。

さらに，(6.2.9)式の変分問題において，上で述べた$[M]$条件を拘束する Legendre 変換

$$p_2'' - p_1' = H_\phi \tag{6.2.14a}$$

$$G = G(x, p_1, p_2, p'' - p') = (p_2'' - p_1')\phi - H(x,\phi,p_1,p_2) \tag{6.2.14b}$$

を行うと，この変分問題は

$$K[p_1,p_2] = J[\phi,p_1,p_2]\Big|_{(6.2.14)}$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left[p_1\phi' + p_2\phi'' + p_1'\phi - p_2''\phi + G(x,p_1,p_2,p_2''-p_1') \right] dx$$
$$-[p_1(x_b) - p_2'(x_b)][\phi(x_b)-\phi_b] + [p_1(x_a) - p_2'(x_a)][\phi(x_a)-\phi_a]$$
$$- p_2(x_b)[\phi'(x_b)-\phi_b'] + p_2(x_a)[\phi'(x_a)-\phi_a']$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} G(x,p_1,p_2,p_2''-p_1')\,dx$$
$$+[p_1(x_b)-p_2'(x_b)]\phi_b - [p_1(x_a)-p_2'(x_a)]\phi_a$$
$$+ p_2(x_b)\phi_b' - p_2(x_a)\phi_a' = stationary \tag{6.2.15}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$0 = \delta K = \int_{x_a}^{x_b} \left[G_{p_1}\delta p_1 + G_{p_2}\delta p_2 + G_{p_2''-p_1'}(\delta p_2'' - \delta p_1') \right] dx$$
$$+[\delta p_1(x_b) - \delta p_2'(x_b)]\cdot\phi_b - [\delta p_1(x_a) - \delta p_2'(x_a)]\cdot\phi_a$$
$$+\delta p_2(x_b)\cdot\phi_b' - \delta p_2(x_a)\cdot\phi_a'$$

$$= \int_{x_a}^{x_b} \left\{ \left[G_{p_1} + (G_{p_2''-p_1'})' \right]\delta p_1 + \left[G_{p_2} + (G_{p_2''-p_1'})'' \right]\delta p_2 \right\} dx$$

$$+\left[G_{p_2''-p_1'}\Big|_{x_b}-\phi_b\right][\delta p_2'(x_b)-\delta p_1(x_b)]-\left[G_{p_2''-p_1'}\Big|_{x_a}-\phi_a\right][\delta p_2'(x_a)-\delta p_1(x_a)]$$

$$-\left[(G_{p_2''-p_1'})'\Big|_{x_b}-\phi_b'\right]\delta p_2(x_b)+\left[(G_{p_2''-p_1'})'\Big|_{x_a}-\phi_a'\right]\delta p_2(x_a)$$

(6.2.16)

となる。したがって，自然条件は

$$G_{p_1}+(G_{p_2''-p_1'})'=0,\quad G_{p_2}+(G_{p_2''-p_1'})''=0,\quad x_a<x<x_b \tag{6.2.17a}$$

$$G_{p_2''-p_1'}\Big|_{x_b}-\phi_b=0,\quad G_{p_2''-p_1'}\Big|_{x_a}-\phi_a=0 \tag{6.2.17b}$$

$$(G_{p_2''-p_1'})'\Big|_{x_b}-\phi_b'=0,\quad (G_{p_2''-p_1'})'\Big|_{x_a}-\phi_a'=0 \tag{6.2.17c}$$

で与えられる。

一方，(6.2.14)式より

$$\begin{aligned} dG(x,p_1,p_2,p''-p') &= (p_2''-p_1')d\phi+\phi\, d(p_2''-p_1') \\ &\quad -H_x dx-H_\phi d\phi-H_{p_1}dp_1-H_{p_2}dp_2 \\ &= \phi\, d(p_2''-p_1')-H_x dx-H_{p_1}dp_1-H_{p_2}dp_2 \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

であるので

$$G_x=H_x,\quad G_{p_1}=H_{p_1},\quad G_{p_2}=H_{p_2},\quad G_{p_2''-p_1'}=\phi \tag{6.2.19}$$

がいえるので,(6.2.15)式の変分問題の自然条件となっている(6.2.17a)式は,変分問題(6.2.4)式の拘束条件であった(6.2.4d)式に外ならない。境界条件(6.2.17b～17c)式も，この変分問題の拘束条件(6.2.4b～4c)である。このように，変分問題(6.2.4)式と(6.2.15)式では，自然条件と拘束条件が逆になっている。

[例 6.2.1]　棒の曲げを例を取って具体的に見てみよう。垂直荷重 f が作用する長さ l の両端を固定された棒のたわみについて考える。棒の長さ方向に取られた座標を x，たわみを ϕ とすると，単位長さ当たりのﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ $F(x,\phi,\phi')$ は

$$F(x,\phi,\phi')=\frac{1}{2}EI\phi''^2-f\phi \tag{6.2.20}$$

であり，この場合の変分原理(6.2.1)式はﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理により

$$I[\phi]=\int_0^l F(x,\phi,\phi')dx$$

$$=\int_0^l\left(\frac{1}{2}EI\phi''^2-f\phi\right)dx=\min \qquad (6.2.21a)$$

under

$$\phi(0)=0, \quad \phi(l)=0 \qquad (6.2.22b)$$

$$\phi'(0)=0, \quad \phi'(l)=0 \qquad (6.2.22c)$$

で与えられる。この変分問題の自然条件は，(6.2.2)式より

$$EI\phi''''=f, \quad 0<x<l \qquad (6.2.23)$$

で与えられる。

(6.2.3a)式を用いてϕ''をu_2で置きかえると

$$F(x,\phi,u_2)=\frac{1}{2}EIu_2{}^2-f\phi \qquad (6.2.24)$$

となり，(6.2.4)式の変分問題は

$$I[\phi,u_2]=\int_0^l F(x,\phi,u_2)dx$$

$$=\int_0^l\left(\frac{1}{2}EIu_2{}^2-f\phi\right)dx=\min \qquad (6.2.25a)$$

under

$$\phi(0)=0, \quad \phi(l)=0 \qquad (6.2.25b)$$

$$\phi'(0)=0, \quad \phi'(l)=0 \qquad (6.2.25c)$$

$$u_2=\phi'', \quad 0<x<l \qquad (6.2.25c)$$

となる。

(6.2.8)式で与えられる Legendre 変換

$$p_2=F_{u_2}=EIu_2 \qquad (6.2.26a)$$

$$H=H(t,\phi,p_2)=p_2u_2-F(x,\phi,\phi'')=\frac{p_2{}^2}{2EI}+f\phi \qquad (6.2.26b)$$

を考えると，(6.2.9)式の変分問題は

$$J[\phi,p_2]=\int_0^l\left[p_2\phi''-H(x,\phi,p_2)\right]dx$$

$$+p_2'(l)\phi(l)-p_2'(0)\phi(0)$$

$$-p_2(l)\phi'(l)+p_2(0)\phi'(0)$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^l \left(p_2 \phi'' - \frac{{p_2}^2}{2EI} - f\phi \right) dx \\
&+ p_2'(l)\phi(l) - p_2'(0)\phi(0) \\
&- p_2(l)\phi'(l) + p_2(0)\phi'(0) = stationary
\end{aligned}
\tag{6.2.27}
$$

となり，この変分問題の自然条件は(6.2.11)式より

$$
\phi'' = H_{p_2} = \frac{p_2}{EI}, \quad p_2'' = H_\phi = f, \quad 0 < x < l \tag{6.2.28a}
$$

$$
\phi(0) = 0, \quad \phi(l) = 0 \tag{6.2.28b}
$$

$$
\phi'(0) = 0, \quad \phi'(l) = 0 \tag{6.2.28c}
$$

となる。

さらに，もう一度(6.2.14)式で与えられる Legendre 変換

$$
p_2'' = H_\phi = f \tag{6.2.29a}
$$

$$
G = G(t, p_2, p_2'') = p_2''\phi - H(x, \phi, p_2) = -\frac{{p_2}^2}{2EI} \tag{6.2.29b}
$$

を行うと， (6.2.15)式の変分問題は

$$
K[p_2] = \int_0^l G(x, p_2, p_2'') dx
$$

$$
= -\int_0^l \frac{{p_2}^2}{2EI} dx = \max \tag{6.1.30a}
$$

under

$$
p_2'' = f, \quad 0 < x < l \tag{6.1.30b}
$$

となる。ただし，この変分問題の拘束条件は，(6.2.29a)式から来ている。この変分問題の自然条件は, ϕ を Lagrange の乗数として拘束条件(6.2.30b)式を緩和した変分問題

$$
K^*[p_2, \phi] = -\int_0^l \frac{{p_2}^2}{2EI} dx + \int_0^l \phi(p_2'' - f) dx = stationary \tag{6.1.31}
$$

を考えることにより与えられる。すなわち

$$
0 = \delta K^* = -\int_0^l \frac{p_2 \delta p_2}{EI} dx + \int_0^l \phi \delta p_2'' dx + \int_0^l \delta\phi \cdot (p_2'' - f) dx
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\int_0^l \left(\frac{p_2}{EI} - \phi'' \right) \delta p_2 dx + \int_0^l \delta\phi \cdot (p_2'' - f) dx \\
&+ \phi(l)\delta p'(l) - \phi(0)\delta p'(0)
\end{aligned}
$$

$$-\phi'(l)\delta p(l) + \phi'(0)\delta p(0) \qquad (6.1.32)$$

であるので，(6.1.30)式の変分問題の自然条件は

$$p_2 = EI\phi'', \quad 0 < x < l \qquad (6.1.33)$$

および

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(l) = 0 \qquad (6.2.25b)$$

$$\phi'(0) = 0, \quad \phi'(l) = 0 \qquad (6.2.25c)$$

である。(6.1.26a)式と併せて考えると，(6.1.33)式の第 1 式の条件は

$$u_2 = \phi'', \quad 0 < x < l \qquad (6.2.25c)$$

に外ならない。(6.1.25)式の最小値問題が，(6.1.30)式の最大値問題になったこと，およびこの二つの変分問題において，自然条件と拘束条件が入れ替わっていることに注意して欲しい。前者については，§6.4 において詳しく説明する。