§6. 変分問題の変換と誤差の評価

§4 では，物理的な側面に重点を置いて変分問題の変換の問題を論じた。ここでは，数学的な側面に焦点を当てて議論したい。併せて，変分法を数値計算に適用する場合の誤差評価の問題についても論ずる。

§6.1　1 次元の問題(変関数に 1 階の導関数が含まれる場合)

まず，変関数に 1 階の導関数が含まれる 1 次元の問題から述べる。変分問題

$$I[\phi]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,\phi,\phi')\,dx=stationary \tag{6.1.1a}$$

under

$$\phi(x_a)=\phi_a,\quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.1.1b}$$

について考えよう。ここで，ϕ' は $d\phi/dx$ を表わす。この変分問題の Euler の方程式は

$$(F_{\phi'})'=F_\phi,\quad x_a<x<x_b \tag{6.1.2}$$

で与えられる。これを書き直すと

$$u=\phi',\quad x_a<x<x_b \tag{6.1.3a}$$

$$(F_u)'=F_\phi,\quad x_a<x<x_b \tag{6.1.3b}$$

となる。変分問題(6.1.1)式も

$$I[\phi,u]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,\phi,u)\,dx=stationary \tag{6.1.4a}$$

under

$$\phi(x_a)=\phi_a,\quad \phi(x_b)=\phi_b \tag{6.1.4b}$$

$$u=\phi',\quad x_a<x<x_b \tag{6.1.4c}$$

と書ける。この変分問題の自然条件は，(6.1.3b)式である。

事実，(6.1.4)式の変分問題において，Lagrange の未定乗数 p により，付帯条件(6.1.4b～4c)式を緩和して得られる変分問題

$$I^*[\phi,u,p]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,\phi,u)\,dx-\int_{x_a}^{x_b}p(u-\phi')\,dx$$

$$-\,p(x_b)[\phi(x_b)-\phi_b]+p(x_a)[\phi(x_a)-\phi_a]=stationary \tag{6.1.5}$$

の停留条件を求めると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta I^* &= \int_{x_a}^{x_b} (F_\phi \delta\phi + F_u \delta u)\,dx - \int_{x_a}^{x_b} p(\delta u - \delta\phi')\,dx \\
&\quad - p(x_b)\delta\phi(x_b) + p(x_a)\delta\phi(x_a) \\
&\quad - \int_{x_a}^{x_b} \delta p \cdot (u - \phi')\,dx \\
&\quad - \delta p(x_b)\cdot[\phi(x_b) - \phi_b] + \delta p(x_a)\cdot[\phi(x_a) - \phi_a] \\
&= -\int_{x_a}^{x_b} [(p' - F_\phi)\delta\phi + (p - F_u)\delta u]\,dx - \int_{x_a}^{x_b} \delta p \cdot (u - \phi')\,dx \\
&\quad - \delta p(x_b)\cdot[\phi(x_b) - \phi_b] + \delta p(x_a)\cdot[\phi(x_a) - \phi_a] \qquad (6.1.6)
\end{aligned}
$$

で与えられる。したがって，この変分問題の自然条件は

$$p' = F_\phi, \quad p = F_u, \quad u = \phi', \quad x_a < x < x_b \qquad (6.1.7a)$$

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \qquad (6.1.7b)$$

であるので，(6.1.3)式がいえる。

(6.1.7a)式の第 1 式と第 3 式は互いに共役な条件であり，第 2 式は共役変数 p と u の仲介をする条件である。力学的な問題を論じた§4 においては，第 1 式を力学的条件(mechanical condition)，第 2 式を運動学的条件(kinematical condition)，第 3 式を物性学的あるいは橋渡し的条件(property or bridge condition)と呼んだ。しかし，数学的に同じ構造をした二つの問題，例えば，膜の撓みの問題と完全流体の渦なし流れの問題においては，力学的条件と運動学的条件が入れ代わっている。したがって，力学的,運動学的などの言葉を離れて,第 1 式を単に$[M]$条件,第 3 式を$[K]$条件，第 2 式を$[M-K]$条件と呼ぶのが良いであろう。(6.1.7b)式の境界条件も$[K]$条件の 1 部である。また，(6.1.4)式の変分問題は，$[K]$を拘束条件として，$[M]$を自然条件として与える変分問題である.

(6.1.5)式の変分問題において，(6.1.7a)式の第 2 式，すなわち上で述べた$[M-K]$条件を拘束する Legendre 変換

$$p = F_u \qquad (6.1.8a)$$

$$H = H(x, \phi, p) = pu - F(x, \phi, u) \qquad (6.1.8b)$$

を行うと，この変分問題は

$$J[\phi, p] = I^*[\phi, u, p]\Big|_{(6.1.8)} = \int_{x_a}^{x_b} \big[p\phi' - H(x, \phi, p)\big]dx$$

$$- p(x_b)[\phi(x_b) - \phi_b] + p(x_a)[\phi(x_a) - \phi_a] = stationary \qquad (6.1.9)$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta J &= \int_{x_a}^{x_b} \left[p\delta\phi' + \delta p \cdot \phi' - H_\phi \delta\phi - H_p \delta p \right] dx \\
&\quad - p(x_b)\delta\phi(x_b) + p(x_a)\delta\phi(x_a) \\
&\quad - \delta p(x_b) \cdot [\phi(x_b) - \phi_b] + \delta p(x_a) \cdot [\phi(x_a) - \phi_a] \\
&= \int_{x_a}^{x_b} \left[-(p' + H_\phi)\delta\phi + (\phi' - H_p)\delta p \right] dx \\
&\quad - \delta p(x_b) \cdot [\phi(x_b) - \phi_b] + \delta p(x_a) \cdot [\phi(x_a) - \phi_a] \qquad (6.1.10)
\end{aligned}
$$

となる。したがって，自然条件は

$$\phi' = H_p, \quad p' = -H_\phi, \quad x_a < x < x_b \qquad (6.1.11a)$$

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \qquad (6.1.11b)$$

である。(6.1.11a)式は，解析力学における正準方程式(canonical equation)に外ならない。

(6.1.8)式より

$$
\begin{aligned}
dH(x, \phi, p) &= pdu + udp - F_x dx - F_\phi d\phi - F_u du \\
&= -F_x dx - F_\phi d\phi + udp \qquad (6.1.12)
\end{aligned}
$$

であるので

$$H_x = -F_x, \quad H_\phi = -F_\phi, \quad H_p = u \qquad (6.1.13)$$

がいえるので，(6.1.11a)式の第 1 式は$[K]$条件，第 2 式は$[M]$条件外ならない。

さらに，(6.1.9)式の変分問題において，上で述べた$[M]$条件を拘束する Legendre 変換

$$p' = -H_\phi \qquad (6.1.14a)$$

$$G = G(x, p, p') = p'\phi + H(x, \phi, p) \qquad (6.1.14b)$$

を行うと，この変分問題は

$$
\begin{aligned}
K[p] = J[\phi, p]\Big|_{(6.1.14)} &= \int_{x_a}^{x_b} \left[p\phi' + p'\phi - G(x, p, p') \right] dx \\
&\quad - p(x_b)[\phi(x_b) - \phi_b] + p(x_a)[\phi(x_a) - \phi_a] \\
&= -\int_{x_a}^{x_b} G(x, p, p') dx + p(x_b)\phi_b - p(x_a)\phi_a = stationary \qquad (6.1.15)
\end{aligned}
$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$
\begin{aligned}
0 = \delta K &= -\int_{x_a}^{x_b} \left(G_p \delta p + G_{p'} \delta p' \right) dx \\
&\quad + \delta p(x_b) \cdot \phi_b - \delta p(x_a) \cdot \phi_a \\
&= \int_{x_a}^{x_b} \left[(G_{p'})' - G_p \right] \delta p \, dx \\
&\quad - \left[G_{p'}(x_b, p(x_b), p'(x_b)) - \phi_b \right] \delta p(x_b) \\
&\quad + \left[G_{p'}(x_a, p(x_a), p'(x_a)) - \phi_a \right] \delta p(x_a)
\end{aligned} \tag{6.1.16}
$$

となる。したがって，自然条件は

$$
(G_{p'})' - G_p = 0, \quad x_a < x < x_b \tag{6.1.17a}
$$

$$
G_{p'}(x_b, p(x_b), p'(x_b)) = \phi_b, \quad G_{p'}(x_a, p(x_a), p'(x_a)) = \phi_a \tag{6.1.17b}
$$

で与えられる。

一方，(6.1.14)式より

$$
\begin{aligned}
dG(x, p, p') &= p' d\phi + \phi dp' + H_x dx + H_\phi d\phi + H_p dp \\
&= H_x dx + H_p dp + \phi dp'
\end{aligned} \tag{6.1.18}
$$

であるので

$$
G_x = H_x, \quad G_p = H_p, \quad G_{p'} = \phi \tag{6.1.19}
$$

がいえるので，(6.1.15)式の変分問題の自然条件となっている(6.1.17a)式は，変分問題(6.1.4)式の拘束条件であった(6.1.4c)式に外ならない。境界条件(6.1.17b)式も，この変分問題の拘束条件(6.1.4b)式である。このように，変分問題(6.1.4)式と(6.1.15)式では，自然条件と拘束条件が逆になっている。

[例 6.1.1]　簡単な例をあげて具体的に見てみよう。まず，1 次元の調和振動子について考える。時間を t，質点の変位を ϕ，質量を m，ばね定数を k とすると，Lagrange 関数 $F(x,\phi,\phi')$ は

$$
F(x,\phi,\phi') = \frac{1}{2} m\phi'^2 - \frac{1}{2} k\phi^2 \tag{6.1.20}
$$

であり，この場合の変分原理(6.1.1)式は Hamilton の原理により

$$
\begin{aligned}
I[\phi] &= \int_{x_a}^{x_b} F(x,\phi,\phi') dx \\
&= \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{1}{2} m\phi'^2 - \frac{1}{2} k\phi^2 \right) dx = stationary
\end{aligned} \tag{6.1.21a}
$$

under

$$
\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \tag{6.1.21b}
$$

で与えられる。この変分問題の自然条件は，(6.1.2)式より

$$m\phi'' = -k\phi, \quad x_a < x < x_b \tag{6.1.22}$$

で与えられる。

(6.1.3a)式を用いてϕ'をuで置きかえると

$$F(x,\phi,u) = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}k\phi^2 \tag{6.1.23}$$

となり，(6.1.4)式の変分問題は

$$I[\phi,u] = \int_{x_a}^{x_b} F(x,\phi,u)\,dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{1}{2}mu^2 - \frac{1}{2}k\phi^2\right)dx = stationary \tag{6.1.24a}$$

under

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \tag{6.1.24b}$$

$$u = \phi', \quad x_a < x < x_b \tag{6.1.24c}$$

となる。

(6.1.8)式で与えられる Legendre 変換

$$p = F_u = mu \tag{6.1.25a}$$

$$H = H(t,\phi,p) = pu - F(x,\phi,\phi') = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}\phi^2 \tag{6.1.25b}$$

を考えると，(6.1.9)式の変分問題は

$$J[\phi,p] = \int_{x_a}^{x_b}[p\phi' - H(x,\phi,p)]dx$$

$$- p(x_b)[\phi(x_b) - \phi_b] + p(x_a)[\phi(x_a) - \phi_a]$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left(p\phi' - \frac{p^2}{2m} - \frac{k}{2}\phi^2\right)dx$$

$$- p(x_b)[\phi(x_b) - \phi_b] + p(x_a)[\phi(x_a) - \phi_a] = stationary \tag{6.1.26}$$

となり，この変分問題の自然条件は(6.1.11)式より

$$\phi' = H_p = \frac{p}{m}, \quad p' = -H_\phi = -k\phi, \quad x_a < x < x_b \tag{6.1.27a}$$

$$\phi(x_a) = \phi_a, \quad \phi(x_b) = \phi_b \tag{6.1.27b}$$

となる。

さらに，もう一度(6.1.14)式で与えられる Legendre 変換

$$p' = -H_\phi = -k\phi \tag{6.1.28a}$$

$$G = G(t, p, p') = p'\phi + H(x, \phi, p) = -\frac{p'^2}{2k} + \frac{p^2}{2m} \tag{6.1.28b}$$

を行うと，(6.1.15)式の変分問題は

$$K[p] = -\int_{x_a}^{x_b} G(x, p, p')dx + p(x_b)\phi_b - p(x_a)\phi_a$$

$$= -\int_{x_a}^{x_b}\left(-\frac{p'^2}{2k} + \frac{p^2}{2m}\right)dx + p(x_b)\phi_b - p(x_a)\phi_a = stationary \tag{6.1.29}$$

となる。この変分問題の自然条件は，(6.1.15)式より

$$\frac{p''}{k} + \frac{p}{m} = 0, \quad x_a < x < x_b \tag{6.1.30a}$$

$$-\frac{p'(x_b)}{k} = \phi_b, \quad -\frac{p'(x_a)}{k} = \phi_a \tag{6.1.30b}$$

で与えられる。

[例 6.1.2]　別の簡単な例を見てみよう。荷重 f が作用する張力 T_0 で張られた長さ l の弦のたわみについて考える。弦の長さ方向に取られた座標を x，たわみを ϕ とすると，単位長さ当たりのﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ $F(x,\phi,\phi')$ は

$$F(x,\phi,\phi') = \frac{1}{2}T_0\phi'^2 - f\phi \tag{6.1.31}$$

であり，この場合の変分原理(6.1.1)式はﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理により

$$I[\phi] = \int_0^l F(x,\phi,\phi')dx$$

$$= \int_0^l\left(\frac{1}{2}T_0\phi'^2 - f\phi\right)dx = \min \tag{6.1.32a}$$

under

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(l) = 0 \tag{6.1.32b}$$

で与えられる。この変分問題の自然条件は，(6.1.2)式より

$$T_0\phi'' = -f, \quad 0 < x < l \tag{6.1.33}$$

で与えられる。

(6.1.3a)式を用いて ϕ' を u で置きかえると

$$F(x,\phi,u) = \frac{1}{2}T_0u^2 - f\phi \tag{6.1.34}$$

となり，(6.1.4)式の変分問題は

$$I[\phi,u]=\int_0^l F(x,\phi,u)\,dx$$

$$=\int_0^l\left(\frac{1}{2}T_0u^2-f\phi\right)dx=\min \qquad (6.1.35a)$$

under

$$\phi(0)=0,\quad \phi(l)=0 \qquad (6.1.35b)$$

$$u=\phi',\quad 0<x<l \qquad (6.1.35c)$$

となる。

(6.1.8)式で与えられる Legendre 変換

$$p=F_u=T_0u \qquad (6.1.36a)$$

$$H=H(x,\phi,p)=pu-F(x,\phi,u)=\frac{p^2}{2T_0}+f\phi \qquad (6.1.36b)$$

を考えると，(6.1.9)式の変分問題は

$$J[\phi,p]=\int_0^l\left[p\phi'-H(x,\phi,p)\right]dx-p(l)\phi(l)+p(0)\phi(0)$$

$$=\int_0^l\left(p\phi'-\frac{p^2}{2T_0}-f\phi\right)dx-p(l)\phi(l)+p(0)\phi(0)=stationary \qquad (6.1.37)$$

となり，この変分問題の自然条件は(6.1.11)式より

$$\phi'=H_p=\frac{p}{T_0},\quad p'=-H_\phi=-f,\quad 0<x<l \qquad (6.1.38a)$$

$$\phi(0)=0,\quad \phi(l)=0 \qquad (6.1.38b)$$

となる。

さらに，もう一度(6.1.14)式で与えられる Legendre 変換

$$p'=-H_\phi=-f \qquad (6.1.39a)$$

$$G=G(x,p,p')=p'\phi+H(x,\phi,p)=\frac{p^2}{2T_0} \qquad (6.1.39b)$$

を行うと，(6.1.15)式の変分問題は

$$K[p]=-\int_0^l G(x,p,p')\,dx$$

$$=-\int_0^l\frac{p^2}{2T_0}\,dx=\max \qquad (6.1.40a)$$

under

$$p' = -f, \quad 0 < x < l \tag{6.1.40b}$$

となる。ただし，この変分問題の拘束条件は，(6.1.39a)式から来ている。この変分問題の自然条件は, ϕ を Lagrange の乗数として拘束条件(6.1.40b)式を緩和した変分問題

$$K^*[p,\phi] = -\int_0^l \frac{p^2}{2T_0}\, dx - \int_0^l \phi(p' + f)dx = stationary \tag{6.1.41}$$

を考えることにより与えられる。すなわち

$$\begin{aligned} 0 = \delta K^* &= -\int_0^l \frac{p\delta p}{T_0}\, dx - \int_0^l \phi\delta p' dx - \int_0^l \delta\phi\cdot(p' + f)dx \\ &= -\int_0^l \left(\frac{p}{T_0} - \phi'\right)\delta p dx - \int_0^l \delta\phi\cdot(p' + f)dx \\ &\quad -\phi(l)\delta p(l) + \phi(0)\delta p(0) \end{aligned} \tag{6.1.42}$$

であるので，(6.1.40)式の変分問題の自然条件は

$$p = T_0\phi', \quad 0 < x < l \tag{6.1.43}$$

および

$$\phi(0) = 0, \quad \phi(l) = 0 \tag{6.1.35b}$$

である。(6.1.36a)式と併せて考えると，(6.1.43)式の条件は

$$u = \phi', \quad 0 < x < l \tag{6.1.35c}$$

に外ならない。(6.1.35)式の最小値問題が，(6.1.40)式の最大値問題になったこと，およびこの二つの変分問題において，自然条件と拘束条件が入れ替わっていることに注意して欲しい。前者については，§6.4 において詳しく説明する。