§5.3　固有値問題の数値解法

[例 5.3.1]　無限自由度の系の固有値問題(自由振動の問題)の数値解法を考える。例として，長さ l の棒の曲げ振動を考える。時間を t，静止している棒の中立軸に沿って x 座標を取り，垂直方向に z 座標を取る。棒の両端点を $x=0, l$ とし，境界条件は両端支持とする。棒の垂直変位(たわみ)を $w(x,t)$ とすると，運動ｴﾈﾙｷﾞ T は

$$T(\dot{w})=\frac{1}{2}\int_0^l \rho\dot{w}^2\,dx \tag{5.3.1}$$

で与えられる。ここで，$\dot{w}$ は w の t による微分を，ρ は棒の単位長さあたりの質量を表す。ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ(棒の曲げによる歪みｴﾈﾙｷﾞ) U は

$$U(w)=\frac{1}{2}\int_0^l EI\,w''^2\,dx \tag{5.3.2}$$

と書ける。ここで，w' は w の x による微分を，EI は棒の単位長さあたりの曲げ剛性を表す。一般的に ρ も EI も x の関数とする。このとき，この系の Lagrangian は

$$L(w,\dot{w})=T(\dot{w})-U(w) \tag{5.3.3}$$

で与えられ，この系の運動は，Hamilton の原理により

$$\begin{aligned}I[w]&=\int_{t_a}^{t_b}L(w,\dot{w})\,dt\\&=\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\frac{1}{2}\int_0^l \rho\dot{w}^2\,dx-\frac{1}{2}\int_0^l EI\,w''^2\,dx\right]\\&=stationary\end{aligned} \tag{5.3.4a}$$

under

$$w(x,t)=0 \quad at\ \ x=0,l \tag{5.3.4b}$$

$$w(x,t_a)=w_a(x), \quad w(x,t_b)=w_b(x), \quad 0<x<l \tag{5.3.4c}$$

により与えられる。(5.3.4)式の変分問題の停留条件を求めると

$$\begin{aligned}0=\delta I&=\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\int_0^l \rho\dot{w}\delta\dot{w}dx-\int_0^l EI\,w''\delta w''dx\right]\\&=\int_{t_a}^{t_b}dt\left\{-EIw''\delta w'\Big|_{x=0}^{x=l}+\int_0^l\left[-\rho\ddot{w}-(EIw'')''\right]\delta w\,dx\right\}\end{aligned} \tag{5.3.5}$$

であるので，自然条件(運動方程式と自然境界条件)は

$$\rho\ddot{w}+(EIw'')''=0, \quad 0<x<l \tag{5.3.6a}$$

$$w'' = 0 \quad at \ x = 0, l \tag{5.3.6b}$$

と求まる。

自由振動の円振動数をωとし，振動ﾓｰﾄﾞを$W(x)$として

$$w(x,t) = W(x)\exp(\sqrt{-1}\omega t) \tag{5.3.7}$$

とする。これを(5.3.6)式と(5.3.4b)式に代入すると

$$\rho\omega^2 W - (EIW'')'' = 0, \quad 0 < x < l \tag{5.3.8a}$$

$$W = 0 \quad at \ x = 0, l \tag{5.3.8b}$$

$$W'' = 0 \quad at \ x = 0, l \tag{5.3.8c}$$

という固有値問題を得る。この固有値問題は，可算無限個の固有値$\omega_i{}^2, (i = 1,2,\cdots)$を有する。これらを

$$0 \le \omega_1 \le \omega_2 \le \cdots \tag{5.1.9}$$

とし，自由円振動数がω_iのときの振動ﾓｰﾄﾞ(固有関数)を$W_i(x, y)$とする。

以下の議論の便宜のために，(5.3.1)式と(5.3.2)式より，$T(W), U(W)$を

$$T(W) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2 dx \tag{5.3.10a}$$

$$U(W) = \frac{1}{2}\int_0^l EIW''^2 dx \tag{5.3.10b}$$

とする。$T(W), U(W)$と運動ｴﾈﾙｷﾞおよびﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞとの関連は明らかであろう。また，$T(W, W^*), U(W, W^*)$を

$$T(W, W^*) = \frac{1}{2}\int_0^l \rho W W^* dx \tag{5.3.11a}$$

$$U(W, W^*) = \frac{1}{2}\int_0^l EIW'' W^{*''} dx \tag{5.3.11b}$$

で，定義する。

$W_i \big/ \sqrt{T(W)}$を新たにW_iとすると，固有関数の直交性は

$$T(W_i, W_j) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W_i W_j \, dxdy = \delta_{ij} \tag{5.3.12}$$

となる。ここで，δ_{ij}は Khronecker のﾃﾞﾙﾀと呼ばれ，(5.1.23)式で定義されている。一方

$$U(W_i, W_j) = \frac{1}{2}\int_0^l EI W_i'' W_j'' \, dx = \omega_j{}^2 \delta_{ij} \tag{5.3.13}$$

となる。

任意の関数$W(x)$を，固有関数展開により

$$W(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i W_i(x),\quad 0<x<l \tag{5.3.14}$$

と表現できる。ここで

$$\xi_i=\frac{1}{2}\int_0^l \rho W W_i\,dx \quad for\ i=1,2,\cdots \tag{5.3.15}$$

となる。

固有値および固有関数に関して

$$\omega_\kappa{}^2=\min[U(W)]=\min\left[\frac{1}{2}\int_0^l EIW''^2\,dx\right] \tag{5.3.16a}$$

under

$$W=0 \quad at\ x=0,l \tag{5.3.16b}$$

$$T(W)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2\,dx=1 \tag{5.3.16c}$$

$$T(W,W_i)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho W W_i\,dx=0,\quad (i=1,2,\cdots,\kappa-1) \tag{5.3.16d}$$

という最小値問題の最小値は固有値$\omega_\kappa{}^2$であり，最小値を与える関数は固有関数W_κである。

(5.3.16)式の最小値問題は

$$\omega_\kappa{}^2=\min\left[\frac{U(W)}{T(W)}\right]=\min\left[\frac{\frac{1}{2}\int_0^l EIW''^2\,dx}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2\,dxdy}\right] \tag{5.3.17a}$$

under

$$W=0 \quad at\ x=0,\ l \tag{5.3.17b}$$

$$T(W,W_i)=\frac{1}{2}\int_0^l \rho W W_i\,dx=0,\quad (i=1,2,\cdots,\kappa-1) \tag{5.3.17c}$$

というように，(5.3.16c)式の正規化条件のない形で考えてもよい。(5.3.17)式の最小値問題は，ﾚｰﾘｰの原理(Rayleigh’s Principle)と呼ばれる。

(5.3.16)式で与えられる変分問題において，ω^2を Lagrange の未定乗数として(5.3.16c)式を緩和すると，(5.3.16c)式の正規化条件を含まないでWの停留条件のみを与える変分問題

$$I^*[W]=U(W)-\omega^2 T(W)$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l EIW''^2\,dx-\omega^2\frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2\,dx=stationary \qquad (5.3.18a)$$

under

$$W=0 \quad at\ x=0,l \qquad (5.3.18b)$$

を得る。まず，$\kappa=1$の場合を考えることとすると，このときには(5.3.16d)式の条件は要らない。(5.3.18)式の変分問題は，正規化条件を含んでいないので，その分の不定性が残している。

(5.3.17)式の変分問題の停留条件は，$U(W)/T(W)$をω^2と書くことにすると

$$0=\delta\left[\frac{U(W)}{T(W)}\right]$$

$$=\frac{1}{T(W)}\left[\delta U(W)-\frac{U(W)}{T(W)}\delta T(W)\right]=\frac{1}{T(W)}\delta\left[U(W)-\omega^2 T(W)\right]$$

$$=\frac{1}{\frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2\,dxdy}\delta\left[\frac{1}{2}\int_0^l EIW''^2\,dx-\omega^2\frac{1}{2}\int_0^l \rho W^2\,dxdy\right] \qquad (5.3.19)$$

となるので，(5.3.17)式の変分問題の解は，(5.3.18)式を満足する。

(5.3.18)式の数値解法を考えてみよう。Wを離散化して有限個の点のWを使って，$T(W), U(W)$の積分を和分近似して，多変数の停留問題で近似してもよい。

あるいは，拘束境界条件(5.3.18b)式を満足する適当な関数系$\Omega_i(x), (i=1,2,\cdots,N)$を用いて展開することが考えられる。いわゆるﾚｰﾘｰ・ﾘｯﾂ(Rayleigh-Litz)の方法である。すなわち，Wを

$$W(x)=\sum_{i=1}^{N}a_i\Omega_i(x) \qquad (5.3.20)$$

で近似する。この式を(5.3.18a)式に代入すると

$$I^*(a_1,a_2,\cdots,a_N)=U(W)-\omega^2 T(W)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}U(\Omega_i,\Omega_j)a_ia_j-\omega^2\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}T(\Omega_i,\Omega_j)a_ia_j$$

$$=stationary \qquad (5.3.21)$$

となるので，停留条件を求めると

$$0=\frac{\partial I^*}{\partial a_i}=\sum_{j=1}^{N}U(\Omega_i,\Omega_j)a_j-\omega^2\sum_{j=1}^{N}T(\Omega_i,\Omega_j)a_j \qquad for\ i=1,2,\cdots,N \tag{5.3.22}$$

という固有値問題を得る。見やすいように，ﾏﾄﾘｸｽを使って表現をすると

$$[B]\{a\}-\omega^2[A]\{a\}=0 \tag{5.3.23}$$

である。ここで

$$\{a\}=[a_1,a_2,\cdots,a_N]^T \tag{5.3.24a}$$

$$[A]=[A_{ij}]=[T(\Omega_i,\Omega_j] \tag{5.3.24b}$$

$$[B]=[B_{ij}]=[U(\Omega_i,\Omega_j] \tag{5.3.24c}$$

とする。数学的には，§5.1 で述べた有限自由度の場合(→(5.1.12)式)と同じになる。固有値(自由円振動数の自乗)ω^2は，(5.3.23)式より

$$\left|B-\omega^2 A\right|=0 \tag{5.3.25}$$

を解けば，N個求まる。これらを大きさの順に並べて，小さいほうから番号を付け，$\omega_i{}^2$に対応する固有ﾍﾞｸﾄﾙを$\{\hat{a}_i\}$とし，$\{\hat{a}_i\}$より(5.3.20)式により求まる関数を$\widehat{W}_i$とすると，有限自由度の場合の固有ﾍﾞｸﾄﾙの直交条件(→(5.1.18)式)より

$$0=\{\hat{a}_i\}^T[A]\{\hat{a}_j\}, \qquad for\ i\neq j \tag{5.3.26}$$

を満たす。この式を(5.3.11a)式を使って書き直すと

$$0=\{\hat{a}_i\}^T[A]\{\hat{a}_j\}=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}A_{mn}\hat{a}_{im}\hat{a}_{jn}=\sum_{m=1}^{N}\sum_{n=1}^{N}T(\Omega_m,\Omega_n)\hat{a}_{im}\hat{a}_{jn}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l\rho\left(\sum_{m=1}^{N}\hat{a}_{im}\Omega_i\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\hat{a}_{in}\Omega_j\right)dx=T(\widehat{W}_i,\widehat{W}_j) \tag{5.3.27}$$

となる。すなわち，$\omega_i{}^2,\widehat{W}_i$，$(i=1,2,\cdots,N)$は，(5.3.8)式で与えられる固有値問題の$N$個の固有値および固有関数の近似解であることが分かる。ただし，次数iが大きくなるほど近似が悪くなる。

そこで，ﾚｰﾘｰ･ﾘｯﾂの方法を実際に用いてみよう。簡単のために，ρ, EIを定数としよう。まず，(5.3.20)式において，$N=1$として

$$W(x)=a_1\Omega_1(x) \tag{5.3.28a}$$

where

$$\Omega_1(x)=x(x-l) \tag{5.3.28b}$$

とすると

$$T(\Omega_1,\Omega_1)=\frac{\rho}{2}\int_0^l \Omega_1\Omega_1 dx=\frac{\rho l^5}{60} \tag{5.3.29}$$

$$U(\Omega_1,\Omega_1)=\frac{EI}{2}\int_0^l \Omega_1{''}\Omega_1{''}dx=2EIl \tag{5.3.30}$$

であるので，(5.3.25)式は

$$0=\left|B-\omega^2 A\right|=2EIl-\omega^2\frac{\rho l^5}{60} \tag{5.3.31}$$

となる。これを解けば,

$$\omega^2=120\frac{EI}{\rho l^4} \tag{5.3.32}$$

が求まる。

一方，(5.3.8)式で与えられる固有値問題の正解は，ρ, EI が一定の場合には

$$\begin{aligned}&\omega_i{}^2=n^4\pi^4\frac{EI}{\rho l^4},\\ &W_i=\sin\left[\left(\frac{\rho\omega^2}{EI}\right)^{1/4}x\right]\qquad for\ i=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{5.3.33}$$

である。これより，$\omega_1{}^2$ は

$$\omega_1{}^2=\pi^4\frac{EI}{\rho l^4}=97.41\frac{EI}{\rho l^4}<\omega^2 \tag{5.3.34}$$

となる。

そこで，近似の精度を上げるために N を大きくする。ただし，$\Omega_1(x)$ は $x=l/2$ に対して対称な関数であるので，対称な関数の中で考える。2 番目の固有値は反対称な関数であるため、対称なものとは別個に扱うことができる。すなわち，$N=2$ として

$$W(x)=a_1\Omega_1(x)+a_3\Omega_3(x) \tag{5.3.35a}$$

where

$$\begin{aligned}&\Omega_1(x)=x(x-l),\\ &\Omega_3(x)=x(x-l)(x-l/2)^2\end{aligned} \tag{5.3.35b}$$

とすると

$$T(\Omega_1,\Omega_3) = T(\Omega_3,\Omega_1) = \frac{\rho}{2}\int_0^l \Omega_1\Omega_3\,dx = \frac{\rho\, l^7}{1680} \qquad (5.3.36\text{a})$$

$$T(\Omega_3,\Omega_3) == \frac{\rho}{2}\int_0^l \Omega_3\Omega_3 dx = \frac{\rho l^9}{20160} \qquad (5.3.36\text{b})$$

$$U(\Omega_1,\Omega_3) = U(\Omega_3,\Omega_1) = \frac{EI}{2}\int_0^l \Omega_1{''}\,\Omega_3{''}\,dx = \frac{1}{2}EI\,l^3 \qquad (5.3.37\text{a})$$

$$U(\Omega_3,\Omega_3) = \frac{EI}{2}\int_0^l \Omega_3{''}\,\Omega_3{''}\,dx = \frac{321}{40}EI\,l^5 \qquad (5.3.37\text{b})$$

となる。(5.3.29～30)式と(5.3.36～37)式より，(5.3.25)式は

$$0 = \left|B - \omega^2 A\right|$$

$$= \det\left(EI\,l \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2}l^2 \\ \frac{1}{2}l^2 & \frac{321}{40}l^4 \end{bmatrix} - \omega^2 \frac{\rho l^5}{60} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{28}l^2 \\ \frac{1}{28}l^2 & \frac{1}{236}l^4 \end{bmatrix} \right)$$

$$= \left(\frac{\rho l^5}{60}\right)^2 \det\begin{bmatrix} \omega^2 - 120\frac{EI}{\rho l^4} & \frac{l^2}{28}\left(\omega^2 - 840\frac{EI}{\rho l^4}\right) \\ \frac{l^2}{28}\left(\omega^2 - 840\frac{EI}{\rho l^4}\right) & \frac{l^4}{336}\left(\omega^2 - 161784\frac{EI}{\rho l^4}\right) \end{bmatrix} \qquad (5.3.38)$$

で与えられる。これを解くと

$$\omega^2 = 118.62\frac{EI}{\rho l^4} \quad and \ 281953.38\frac{EI}{\rho l^4} \qquad (5.3.39)$$

となる。(5.3.33)式より

$$\omega_1{}^2 = \pi^4 \frac{EI}{\rho l^4} = 97.41\frac{EI}{\rho l^4} < (\omega_1^*)^2 \qquad (5.3.40\text{a})$$

$$\omega_3{}^2 = (3\pi)^4 \frac{EI}{\rho l^4} = 7890.14\frac{EI}{\rho l^4} < (\omega_3^*)^2 \qquad (5.3.40\text{b})$$

である。ここで，ω_1^*, ω_3^*は(5.3.39)式のωの小なるものと大なるものを表わす。ω_1に対する近似が改善されていることが分かる。

これに対応する固有ﾍﾞｸﾄﾙは

$$0=\begin{bmatrix} \omega^2-120\dfrac{EI}{\rho l^4} & \dfrac{l^2}{28}\left(\omega^2-840\dfrac{EI}{\rho l^4}\right) \\ \dfrac{l^2}{28}\left(\omega^2-840\dfrac{EI}{\rho l^4}\right) & \dfrac{l^4}{336}\left(\omega^2-161784\dfrac{EI}{\rho l^4}\right) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{Bmatrix} \qquad (5.3.41)$$

に，(5.3.39)式のω_1^*, ω_3^*を代入して求める。

反対称の場合には，例えば$N=2$として

$$W(x)=a_2\Omega_2(x)+a_4\Omega_4(x) \qquad (5.3.42a)$$

where

$$\begin{aligned} \Omega_2(x)&=x(x-l)(x-l/2) \\ \Omega_4(x)&=x(x-l)(x-l/2)^3 \end{aligned} \qquad (5.3.42b)$$

とすればよい。簡単のために，$N=1$とすると

$$T(\Omega_2,\Omega_2)==\frac{\rho}{2}\int_0^l \Omega_2\Omega_2 dx=\frac{\rho l^7}{1680} \qquad (5.3.43)$$

$$U(\Omega_2,\Omega_2)=\frac{EI}{2}\int_0^l {\Omega_2}''{\Omega_2}'' dx=\frac{3}{2}EI\,l^3 \qquad (5.3.44)$$

であるので，(5.3.25)式は

$$0=\left|B-\omega^2 A\right|=\frac{3}{2}EIl^3-\omega^2\frac{\rho l^7}{1680} \qquad (5.3.45)$$

で与えられる。これを解くと

$$\omega^2=2520\frac{EI}{\rho l^4} \qquad (5.3.46)$$

となる。(5.3.33)式より

$${\omega_2}^2=(2\pi)^4\frac{EI}{\rho l^4}=1558.55\frac{EI}{\rho l^4}<\omega^2 \qquad (5.3.47)$$

となる。

精度向上のために，手計算で項数Nを上げるのは大変であるが，計算機を使えばなんでもないことである。

§5.4　参考文献

[5.1]　林 毅，村 外志夫，「変分法」，応用数学講座第 13 巻，ｺﾛﾅ社，(1958)
[5.2]　寺沢寛一編，「数学概論(応用編)」，岩波書店，(1960)
[5.3]　K. Washizu, VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND

PLASTICITY, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, (1968).