§5.2　無限自由度の系の固有値問題

[例 5.2.1]　つぎに, 無限自由度の系の自由振動の問題を考える。例として, 膜の振動問題を考える。時間をt, 静止している膜の面内にx, y座標を取り, 垂直方向にz座標を取る。膜の存在する領域をΩ，膜の境界をS，膜の垂直変位(たわみ)を$w(x, y, t)$とすると，運動ｴﾈﾙｷﾞTは

$$T(\dot{w}) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho \dot{w}^2 \, dxdy \tag{5.2.1}$$

で与えられる。ここで，$\dot{w}$はwのtによる微分を，ρは膜の単位面積あたりの質量を表す。ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ(膜の延びによる歪みｴﾈﾙｷﾞ) Uは

$$U(w) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} T_0 ({w_x}^2 + {w_y}^2) \, dxdy \tag{5.2.2}$$

と書ける。ここで，w_x, w_yはwのx, yによる微分を，T_0は膜断面の単位長さあたりの張力を表す。膜の場合にはT_0は一定であるが，一般的に$T_0(x, y)$とする。このとき，この系の Lagrangian は

$$L(w, \dot{w}) = T(\dot{w}) - U(w) \tag{5.2.3}$$

で与えられ，この系の運動は，Hamilton の原理により

$$I[w] = \int_{t_a}^{t_b} L(w, \dot{w}) \, dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho \dot{w}^2 \, dxdy - \frac{1}{2}\iint_{\Omega} T_0 ({w_x}^2 + {w_y}^2) \, dxdy \right]$$

$$= stationary \tag{5.2.4a}$$

under

$$w(x, y, t) = 0 \quad on\ S \tag{5.2.4b}$$

$$w(x, y, t_a) = w_a(x, y), \quad w(x, y, t_b) = w_b(x, y) \quad in\ \Omega \tag{5.2.4c}$$

により与えられる。(5.2.4)式の変分問題の停留条件を求めると

$$0 = \delta I = \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\iint_{\Omega} \rho \dot{w} \delta \dot{w} \, dxdy - \iint_{\Omega} T_0 (w_x \delta \dot{w}_x + w_y \delta \dot{w}_y) \, dxdy \right]$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} dt \left\{ \iint_{\Omega} \left[-\rho \ddot{w} + (T_0 w_x)_x + (T_0 w_y)_y \right] \delta w \, dxdy \right\} \tag{5.2.5}$$

であるので，運動方程式は

$$\rho \ddot{w} - (T_0 w_x)_x - (T_0 w_y)_y = 0 \quad in\ \Omega \tag{5.2.6}$$

と求まる。

自由振動の円振動数をωとし，振動ﾓｰﾄﾞを$W(x,y)$として

$$w(x,y,t)=W(x,y)\exp(\sqrt{-1}\omega t) \tag{5.2.7}$$

とする。これを(5.2.6)式と(5.2.4b)式に代入すると

$$\rho\omega^2 W+(T_0W_x)_x+(T_0W_y)_y=0 \quad in\ \Omega \tag{5.2.8a}$$

$$W=0 \quad on\ S \tag{5.2.8b}$$

という固有値問題を得る。この固有値問題は，可算無限個の固有値$\omega_i^{\ 2},(i=1,2,\cdots)$を有する。これらを

$$0\le\omega_1\le\omega_2\le\cdots \tag{5.2.9}$$

とすると，自由円振動数がω_iのときの振動ﾓｰﾄﾞ(固有関数)$W_i(x,y)$は

$$\rho\omega_i^{\ 2}W_i+(T_0W_{ix})_x+(T_0W_{iy})_y=0 \quad in\ \Omega \tag{5.2.10a}$$

$$W_i=0 \quad on\ S \tag{5.2.10b}$$

より求まる。

つぎに，固有関数の直交性を導いてみよう。(5.2.10)式において，iをjとすると

$$\rho\omega_j^{\ 2}W_j+(T_0W_{jx})_x+(T_0W_{jy})_y=0 \quad in\ \Omega \tag{5.2.11a}$$

$$W_j=0 \quad on\ S \tag{5.2.11b}$$

となる。(5.2.10a)式と(5.2.11a)式の両辺に，それぞれW_jとW_iを掛けてΩで積分すると

$$\iint_\Omega W_j\left[(T_0W_{ix})_x+(T_0W_{iy})_y\right]dxdy=-\omega_i^{\ 2}\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy \tag{5.2.12a}$$

$$\iint_\Omega W_i\left[(T_0W_{jx})_x+(T_0W_{jy})_y\right]dxdy=-\omega_j^{\ 2}\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy \tag{5.2.12b}$$

となる。ここで，(5.2.12)式の左辺が

$$\iint_\Omega W_j\left[(T_0W_{ix})_x+(T_0W_{iy})_y\right]dxdy$$

$$=\iint_\Omega\left[(T_0W_{ix}W_j)_x+(T_0W_{iy}W_j)_y-T_0W_{ix}W_{jx}-T_0W_{iy}W_{jy}\right]dxdy$$

$$=-\iint_\Omega T_0\left(W_{ix}W_{jx}+W_{iy}W_{jy}\right)dxdy \tag{5.2.13a}$$

$$\iint_\Omega W_i\left[(T_0W_{jx})_x+(T_0W_{jy})_y\right]dxdy=-\iint_\Omega T_0\left(W_{ix}W_{jx}+W_{iy}W_{jy}\right)dxdy \qquad (5.2.13a)$$

と変形されることに注意すれば，(5.2.12a)式と(5.2.12b)式の差を取ることによって

$$0=-(\omega_i{}^2-\omega_j{}^2)\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy \qquad (5.2.14)$$

を得る。$\omega_i{}^2\neq\omega_j{}^2$ とすれば

$$0=\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy \qquad for\ i\neq j \qquad (5.2.15)$$

が導ける。$\omega_i{}^2=\omega_j{}^2$ のときには，Schmidt の直交化の考えに従って，新たに W_j^* を

$$W_j^*=W_i-\frac{\iint_\Omega \rho W_iW_i\,dxdy}{\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy}W_j \qquad (5.2.16)$$

により定義すると，W_j^* は固有値方程式

$$\rho\omega_j{}^2W_j^*+(T_0W_{jx}^*)_x+(T_0W_{jy}^*)_y=0 \qquad in\ \Omega \qquad (5.2.17a)$$

$$W_j^*=0 \qquad on\ S \qquad (5.2.17b)$$

と，(5.2.15)式の条件

$$0=\iint_\Omega \rho W_iW_j^*\,dxdy \qquad (5.2.18)$$

を満足している。そこで，改めて W_j^* を W_j と書くことにする。(5.1.15)式の関係を, 固有関数(振動ﾓｰﾄﾞ)の直交性という。さらに, $W_i\Big/\left(\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W_i{}^2\,dxdy\right)^{1/2}$ を新たに W_i とすると

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W_i{}^2\,dxdy=1 \qquad (5.2.19)$$

と正規化される。(5.2.15)式と(5.2.19)式より

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W_iW_j\,dxdy=\delta_{ij} \qquad (5.2.20)$$

となる。ここで，δ_{ij} は Khronecker のﾃﾞﾙﾀと呼ばれ，(5.1.23)式で定義されている。一方，(5.2.11)式を用いると

$$\frac{1}{2}\iint_\Omega T_0\left(W_{ix}W_{jx}+W_{iy}W_{jy}\right)dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[(T_0W_iW_{jx})_x+(T_0W_iW_{jy})_y-(T_0W_{jx})_xW_i-(T_0W_{jy})_yW_i\right]dxdy$$

$$=-\frac{1}{2}\iint_\Omega\left[(T_0W_{jx})_x+(T_0W_{jy})_y\right]W_i\,dxdy$$

$$=\omega_j{}^2\frac{1}{2}\iint_\Omega\rho W_iW_j\,dxdy=\omega_j{}^2\delta_{ij} \tag{5.2.21}$$

となる。

(5.2.20)式より，固有関数$W_i(x,y)$，$(i=1,2,\cdots)$は，可算無限次元関数空間における互いに直交する可算無限個の正規化された基底関数である。したがって，これを用いて任意の関数を展開することができる。すなわち，任意の関数$W(x,y)$を

$$W(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_iW_i(x,y)\qquad in\ \Omega \tag{5.2.22}$$

と表現できる。これは，有限自由度の場合の主軸変換に相当し，固有関数展開と呼ばれる。固有関数の直交性(5.2.20)式より

$$\xi_i=\frac{1}{2}\iint_\Omega\rho WW_i\,dxdy\qquad for\ \ i=1,2,\cdots \tag{5.2.23}$$

となる。また，(5.2.1)式と(5.2.2)式より，$T(W),U(W)$を

$$T(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega\rho W^2dxdy \tag{5.2.24a}$$

$$U(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega T_0\left(W_x{}^2+W_y{}^2\right)dxdy \tag{5.2.24b}$$

とする。$T(W),U(W)$と運動ｴﾈﾙｷﾞおよびﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞとの関連は明らかであろう。そこで，(5.2.22)式を(5.2.24)式に代入すると，(5.2.20)式と(5.2.21)式より

$$T(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega\rho W^2dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\xi_i\xi_j \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho W_i W_j \, dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\ 2} \tag{5.2.25a}$$

$$U(W) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} T_0\left(W_x^{\ 2} + W_y^{\ 2}\right)dxdy$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\xi_i\xi_j \frac{1}{2}\iint_{\Omega} T_0\left(W_{ix}W_{jx} + W_{iy}W_{jy}\right)dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i^{\ 2}\xi_i^{\ 2} \tag{5.2.25b}$$

を得る。したがって

$$T(W) = \sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\ 2} = 1 \tag{5.2.26}$$

を仮定すると

$$U(W) = \sum_{i=1}^{\infty}\omega_i^{\ 2}\xi_i^{\ 2} \geq \omega_1^{\ 2}\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{\ 2} = \omega_1^{\ 2} \tag{5.2.27}$$

が成り立つ。すなわち，$\xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \cdots$ のとき，$U(W)$ は最小値 $\omega_1^{\ 2}$ を取る。$1 \leq \kappa < \infty$ として，$\xi_1 = \xi_2 = \cdots = \xi_{\kappa-1} = 0$ のときには

$$U(W) = \sum_{i=\kappa}^{\infty}\omega_i^{\ 2}\xi_i^{\ 2} \geq \omega_\kappa^{\ 2}\sum_{i=\kappa}^{\infty}\xi_i^{\ 2} = \omega_\kappa^{\ 2} \tag{5.2.28}$$

であるから，$\xi_\kappa = 1, \xi_{\kappa+1} = \xi_{\kappa+2} = \cdots = 0$ のとき，$U(W)$ は最小値 $\omega_\kappa^{\ 2}$ を取る。

以上を書き直すと

$$\omega_\kappa^{\ 2} = \min[U(W)] = \min\left[\frac{1}{2}\iint_{\Omega} T_0\left(W_x^{\ 2} + W_y^{\ 2}\right)dxdy\right] \tag{5.2.29a}$$

under

$$W = 0 \quad on\ S \tag{5.2.29b}$$

$$T(W) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho W^2 \, dxdy = 1 \tag{5.2.29c}$$

$$T(W, W_i) = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho W W_i \, dxdy = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, \kappa - 1) \tag{5.2.29d}$$

という最小値問題の最小値は固有値 $\omega_\kappa^{\ 2}$ であり，最小値を与える関数は固有関数 W_κ である。

(5.2.29)式の最小値問題は

$$\omega_\kappa{}^2 = \min\left[\frac{U(W)}{T(W)}\right] = \min\left[\frac{\frac{1}{2}\iint_\Omega T_0\left(W_x{}^2 + W_y{}^2\right)dxdy}{\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W^2 dxdy}\right] \tag{5.2.30a}$$

under

$$W = 0 \quad on\ S \tag{5.2.30b}$$

$$T(W, W_i) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W W_i\, dxdy = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, \kappa - 1) \tag{5.2.30c}$$

というように，(5.2.29c)式の正規化条件のない形で考えてもよい。(5.2.30)式の最小値問題は，ﾚｰﾘｰの原理(Rayleigh's Principle)と呼ばれる。

(5.2.29)式で与えられる最小値問題において，(5.2.29d)式と異なる直交条件を考えてみよう。すなわち，固有関数W_i $(i = 1, 2, \cdots)$の代わりに，関数V_i $(i = 1, 2, \cdots)$を考えると，固有値の最小最大の原理(minimum-maximum principle)

$$\omega_\kappa{}^2 = \max_{\mathbf{V}}\left[U(W(x, y; \mathbf{V}))\right] \tag{5.2.31a}$$

where

$$U(W(x, y; \mathbf{V})) = \min_W\left[U(W)\right] \tag{5.2.31b}$$

under

$$W = 0 \quad on\ S \tag{5.2.31c}$$

$$T(W) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W^2 dxdy = 1 \tag{5.2.31d}$$

$$T(W, V_i) = \frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W V_i\, dxdy = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, \kappa - 1) \tag{5.2.31e}$$

になる。ここで、$\mathbf{V}$は関数V_i $(i = 1, 2, \cdots)$を表す。この原理によれば，特定の$\mathbf{V}$に対して求めた最小値$U(W(x, y; \mathbf{V}))$に関して，$\mathbf{V}$を変化させて得られる$U(W(x, y; \mathbf{V}))$の最大値は$\omega_\kappa{}^2$に等しい。

この最小最大の原理を証明してみよう。Wと$\mathbf{V}_i$ $(i = 1, 2, \cdots, \kappa - 1)$を固有関数展開して

$$W = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j W_j \tag{5.1.32a}$$

$$V_i = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} W_j, \quad (i = 1,2,\cdots,\kappa-1) \tag{5.1.32b}$$

とすると，(5.2.31)式を

$$\omega_\kappa{}^2 = \max_{\boldsymbol{\alpha}} \left[U(W(x,y;\boldsymbol{\alpha})) \right] \tag{5.2.33a}$$

where

$$U(W(x,y;\boldsymbol{\alpha})) = \min_{W} \left[U(W) \right] \tag{5.2.33b}$$

under

$$T(W) = \sum_{i=1}^{\infty} \xi_i{}^2 = 1 \tag{5.2.33c}$$

$$T(W, V_i) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_j = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,\kappa-1) \tag{5.2.33d}$$

と書き直すことができる。ここで，$\boldsymbol{\alpha}$はα_{ij} $(i = 1,2,\cdots,\kappa-1;\ j = 1,2,\cdots,N)$を表す。

まず，(5.2.33b～d)式で与えられる最小値問題で求まる最小値はα_{ij}の関数であるので，$U(W(x,y;\boldsymbol{\alpha}))$としている。つぎに

$$\xi^*{}_{\kappa+1} = \xi^*{}_{\kappa+2} = \cdots = 0 \tag{5.2.34}$$

とすると，これと(5.2.33c)式と(5.2.33d)式より$\xi^*{}_j$，$(j = 1,2,\cdots)$は一意に定まる。これによる$U(W)$の値を，$U(W^*)$とする。当然

$$U(W(x,y;\boldsymbol{\alpha})) \le U(W^*(x,y)) \tag{5.2.35}$$

が成り立つ。一方

$$U(W^*) = \sum_{i=1}^{\kappa} \omega_i{}^2 \xi^*{}_i{}^2 \le \omega_\kappa{}^2 \sum_{i=1}^{\kappa} \xi^*{}_i{}^2 = \omega_\kappa{}^2 \tag{5.2.36}$$

であるので

$$U(W(x,y;\boldsymbol{\alpha})) \le \omega_\kappa{}^2 \tag{5.2.37}$$

がいえる。

さらに

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}, \quad (i = 1,2,\cdots,\kappa-1;\ j = 1,2,\cdots,N) \tag{5.2.38}$$

のとき，ξ_jを$\xi^{**}{}_j$と書くことにすると，(5.2.33d)式より

$$\xi^{**}{}_1 = \xi^{**}{}_2 = \cdots = \xi^{**}{}_{\kappa-1} = 0 \tag{5.2.39}$$

となる。したがって

$$U(W^{**})=\sum_{i=\kappa}^{\infty}\omega_i{}^2\xi^{**}{}_i{}^2 \geq \omega_\kappa{}^2\sum_{i=\kappa}^{\infty}\xi^{**}{}_i{}^2=\omega_\kappa{}^2 \qquad (5.2.40)$$

が成り立つ。すなわち

$$\omega_\kappa{}^2=\min_{\mathbf{Q}^{**}}\left[U(W^{**})\right] \qquad (5.2.41)$$

となる。故に，$\omega_\kappa{}^2$ は$U(W(x,y;\alpha))$の最大値である。

(5.2.8)式で与えられる固有値問題

$$\rho\omega^2 W+(T_0W_x)_x+(T_0W_y)_y=0 \quad in\ \Omega \qquad (5.2.8a)$$

$$W=0 \quad on\ S \qquad (5.2.8b)$$

において，正規化条件

$$T(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W^2 dxdy=1 \qquad (5.2.42)$$

を課して，解が一意に定まるようにすると，この固有値問題は最小値問題

$$U(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega T_0\left(W_x{}^2+W_y{}^2\right)dxdy=\min \qquad (5.2.43a)$$

under

$$W=0 \quad on\ S \qquad (5.2.43b)$$

$$T(W)=\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho W^2 dxdy=1 \qquad (5.2.43c)$$

と等価である。ω^2 を Lagrange の未定乗数と考えて，付帯条件を緩和すると，(5.2.8a)式が停留条件になる。

つぎに，無限自由度の振動系の強制振動について考えてみよう。一般力を $f(x, y, t)$ とすると，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙWは

$$W=-\iint_\Omega f\,w dxdy \qquad (5.2.44)$$

となる。この場合の Lagrangian L は

$$L=T-U-W$$

で，Hamilton の原理は

$$I[w]=\int_{t_a}^{t_b}L(w,\dot{w})\,dt$$

$$=\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\frac{1}{2}\iint_\Omega \rho\dot{w}^2 dxdy-\frac{1}{2}\iint_\Omega T_0(w_x{}^2+w_y{}^2)dxdy+\iint_\Omega f\,w dxdy\right]$$

$$= stationary \tag{5.2.45a}$$

under

$$w(x,y,t)=0 \quad on\ S \tag{5.2.45b}$$

$$w(x,y,t_a)=w_a(x,y), \quad w(x,y,t_b)=w_b(x,y) \quad in\ \Omega \tag{5.2.45c}$$

で与えられる。したがって，運動方程式

$$\rho\ddot{w}-(T_0 w_x)_x-(T_0 w_y)_y = f \quad in\ \Omega \tag{5.2.46}$$

となる。

関数 $w(x,y,t),\ f(x,y,t)$ を固有関数展開して

$$w(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i(t)W_i(x,y) \quad in\ \Omega \tag{5.2.47a}$$

$$f(x,y,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i(t)\rho W_i(x,y) \quad in\ \Omega \tag{5.2.47b}$$

とする。ここで

$$\eta_i(t)=\frac{1}{2}\iint_{\Omega} fW_i\,dxdy \quad for\ i=1,2,\cdots \tag{5.2.48}$$

である。(5.2.47)式を(5.2.46)式に代入すると

$$\sum_{i=1}^{\infty}\rho\ddot{\xi}_i W_i-\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\left[(T_0W_{ix})_x+(T_0W_{iy})_y\right]=\sum_{i=1}^{\infty}\rho\eta_i W_i \tag{5.2.49}$$

となる。(5.2.10a)式を用いて書き直すと

$$\sum_{j=1}^{\infty}\rho\ddot{\xi}_j W_j+\sum_{j=1}^{\infty}\rho\omega_j{}^2\xi_j W_j=\sum_{j=1}^{\infty}\rho\eta_j W_j \tag{5.2.50}$$

と書ける。この式の両辺に W_i を掛けて Ω で積分して(5.2.20)式を用いると

$$\ddot{\xi}_i+\omega^2\xi_i=\eta_i(t) \quad (i=1,2,\cdots) \tag{5.2.51}$$

となる。

ﾃﾞｭｱﾒﾙ(Duhamel)の公式を用いると，(5.2.51)式は直ちに積分できて

$$\xi_i(t)=\xi_i(0)\cos\omega t+\frac{1}{\omega}\dot{\xi}_i(0)\sin\omega t$$

$$+\frac{1}{\omega}\int_0^t\eta_i(\tau)\sin\omega(t-\tau)\,d\tau \quad (i=1,2,\cdots) \tag{5.2.52}$$

となる。