

§ 5. 変分法の固有値問題への応用

変分法の大きな応用分野に、振動や座屈の問題と関連する固有値問題がある。変分法は、構造物の自由振動数や振動モード、座屈荷重や座屈モードに関する興味ある理論を展開する。すなわち、固有関数の直交性、固有値の最小原理、最小最大原理、レイリー(Rayleigh)の原理である。また一方では、直接解法と組み合わせると、それらを求める強力な数値解法を与える。すなわち、レイリー・リッツ(Rayleigh・Ritz)の方法である。

§ 5.1 では有限自由度の系について、また § 5.2 では無限自由度の系について述べる。§ 5.3 においては、簡単な問題の数値例について述べる。

§ 5.1 有限自由度の系の固有値問題

まず、有限自由度の系の自由振動の問題を考える。系の自由度を N 、時間を t 、一般座標を q_i 、($i=1,2,\dots,N$) とする。運動エネルギー T を

$$T(\dot{q}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad a_{ij} = a_{ji} \quad (5.1.1)$$

とする。ここで、 $\dot{q}_i$ は q_i の t による微分を表す。さらに、ポテンシャルエネルギー U を

$$U(q) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = b_{ji} \quad (5.1.2)$$

とする。このとき、この系の Lagrangian は

$$L(q, \dot{q}) = T(\dot{q}) - U(q) \quad (5.1.3)$$

で与えられ、この系の運動は、Hamilton の原理により

$$I[q] = \int_{t_a}^{t_b} L(q, \dot{q}) dt = \text{stationary} \quad (5.1.4)$$

により与えられる。(5.1.4)式の変分問題の停留条件を求めると、Euler の方程式として

$$\frac{dL_{q_i}}{dt} - L_{q_i} = 0, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (5.1.5)$$

を得る。(5.1.1)式と(5.1.2)式より、 L_{q_i} 、 $L_{\dot{q}_i}$ は

$$\begin{aligned}
L_{\dot{q}_i} &= \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{q}_j, \\
L_{q_i} &= -\sum_{j=1}^N b_{ij} q_j
\end{aligned}
\quad (i=1,2,\dots,N) \tag{5.1.6}$$

であるので，これを(5.1.5)式に代入すると，運動方程式

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N b_{ij} q_j = 0, \quad (i=1,2,\dots,N) \tag{5.1.7}$$

を得る。

マトリクスで表現すると

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{q\} = 0 \tag{5.1.8}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
[A] &= [a_{ij}], \\
[B] &= [b_{ij}], \\
\{q\} &= [q_1, q_2, \dots, q_N]^T
\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

である。また， $[A], [B]$ は対称行列である。自由振動の円振動数を ω とし

$$\{q\} = \{Q\} \exp(\sqrt{-1}\omega t) \tag{5.1.10}$$

とする。ここで， $\{Q\}$ は

$$\{Q\} = [Q_1, Q_2, \dots, Q_N]^T \tag{5.1.11}$$

である。(5.1.10)式を(5.1.8)式に代入すると

$$[B]\{Q\} - \omega^2 [A]\{Q\} = 0 \tag{5.1.12}$$

という固有値問題を得る。したがって，自由円振動数 ω は，固有値方程式

$$|B - \omega^2 A| = 0 \tag{5.1.13}$$

より求まる。この方程式は， N 個の固有値 $\omega_i^2, (i=1,2,\dots,N)$ を有する。これらを

$$0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N \tag{5.1.14}$$

とすると，自由円振動数が ω_i のときの振動モード(固有ベクトル) $\{\hat{Q}_i\}$ は

$$[B - \omega_i^2 A]\{\hat{Q}_i\} = 0 \tag{5.1.15}$$

より求まる。

つぎに，固有ベクトルの直交性を導いてみよう。(5.1.12)式の固有値問題において， i 番目の固有値と固有ベクトルを $\omega_i^2, \{\hat{Q}_i\}$ とし， j 番目の固有値と固有

ベクトルを $\omega_j^2, \{\hat{Q}_j\}$ とすると

$$[B]\{\hat{Q}_i\} = \omega_i^2 [A]\{\hat{Q}_i\} \quad (5.1.16a)$$

$$[B]\{\hat{Q}_j\} = \omega_j^2 [A]\{\hat{Q}_j\} \quad (5.1.16b)$$

となる。(5.1.16a)式と(5.1.16b)式の両辺に、左からそれぞれ $\{\hat{Q}_i\}^T$ と $\{\hat{Q}_j\}^T$ を掛けて引くと、 $[A], [B]$ は対称行列であるので

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_j\}, \quad \text{for } i \neq j \quad (5.1.17)$$

が成り立つ。 $\omega_i^2 \neq \omega_j^2$ とすれば

$$0 = \{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_j\}, \quad \text{for } i \neq j \quad (5.1.18)$$

が導ける。すると、 $\omega_i^2 = \omega_j^2$ のときには、Schmidt の直交化の考えに従っ

て、新たに $\{\hat{Q}_j^*\}$ を

$$\{\hat{Q}_j^*\} = \{\hat{Q}_j\} - \frac{\{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_j\}}{\{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_i\}} \{\hat{Q}_i\} \quad (5.1.19)$$

により定義すると

$$[B]\{\hat{Q}_j^*\} = \omega_j^2 [A]\{\hat{Q}_j^*\} \quad (5.1.20a)$$

$$\{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_j^*\} = 0 \quad (5.1.20b)$$

がいえる。そこで、改めて $\{\hat{Q}_j^*\}$ を $\{\hat{Q}_j\}$ と書くことにする。(5.1.18)式の関

係を、固有ベクトル(振動モード)の直交性という。さらに、 $\{\hat{Q}_i\} / (1/2 \{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_i\})^{1/2}$ を新たに $\{\hat{Q}_i\}$ とすると

$$\frac{1}{2} \{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_i\} = 1 \quad (5.1.21)$$

と正規化される。(5.1.18)式と(5.1.21)式より

$$\frac{1}{2}\{\hat{Q}_i\}^T[A]\{\hat{Q}_j\}=\delta_{ij} \quad (5.1.22)$$

となる。ここで、 δ_{ij} は Kronecker のデルタと呼ばれ

$$\delta_{ij}=\begin{cases} 1 & \text{for } i=j, \\ 0 & \text{for } i\neq j \end{cases} \quad (5.1.23)$$

を満足する。一方

$$\frac{1}{2}\{\hat{Q}_i\}^T[B]\{\hat{Q}_j\}=\frac{1}{2}\{\hat{Q}_i\}^T\omega_j^2[A]\{\hat{Q}_j\}=\omega_j^2\delta_{ij} \quad (5.1.24)$$

となる。

(5.1.22)式より、固有ベクトル $\{\hat{Q}_i\}$ 、($i=1,2,\dots,N$)は、 N 次元ベクトル空間における互いに直交する N 個の単位ベクトルである。したがって、これをこの N 次元ベクトル空間の基底ベクトルとして、任意のベクトルを展開することができる。すなわち、任意ベクトル $\{Q\}$ を

$$\{Q\}=\sum_{i=1}^N\xi_i\{\hat{Q}_i\} \quad (5.1.25)$$

と表わす。固有ベクトルの直交性(5.1.22)式より

$$\xi_i=\frac{1}{2}\{\hat{Q}_i\}^T[A]\{Q\} \quad (5.1.26)$$

となる。(5.1.25)式に示される基底ベクトルの変換を主軸変換、または固有ベクトル展開という。また

$$\mathbf{Q}=\{Q\} \quad (5.1.27)$$

と書くことにして、 $T(\mathbf{Q}), U(\mathbf{Q})$ を

$$T(\mathbf{Q})=\frac{1}{2}\{Q\}^T[A]\{Q\} \quad (5.1.28a)$$

$$U(\mathbf{Q})=\frac{1}{2}\{Q\}^T[B]\{Q\} \quad (5.1.28b)$$

で定義する。(5.1.1)式と(5.1.2)式より、 $T(\mathbf{Q}), U(\mathbf{Q})$ と運動エネルギーおよびポテンシャルエネルギーとの関連は明らかであろう。

そこで、(5.1.25)式を(5.1.28)式に代入すると、(5.1.22)式と(5.1.24)式より

$$T(\mathbf{Q})=\frac{1}{2}\{Q\}^T[A]\{Q\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N \xi_i \{\hat{Q}_i\}^T \right) [A] \left(\sum_{j=1}^N \xi_j \{\hat{Q}_j\} \right) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i \xi_j \{\hat{Q}_i\}^T [A] \{\hat{Q}_j\} = \sum_{i=1}^N \xi_i^2
\end{aligned} \tag{5.1.29a}$$

$$\begin{aligned}
U(\mathbf{Q}) &= \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [B] \{\mathbf{Q}\} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \xi_i \xi_j \{\hat{Q}_i\}^T [B] \{\hat{Q}_j\} = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \xi_i^2
\end{aligned} \tag{5.1.29b}$$

を得る。したがって

$$T(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = 1 \tag{5.1.30}$$

を仮定すると

$$U(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \omega_i^2 \xi_i^2 \geq \omega_1^2 \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = \omega_1^2 \tag{5.1.31}$$

が成り立つ。すなわち、 $\xi_1 = 1, \xi_2 = \xi_3 = \dots = \xi_N = 0$ のとき、 $U(\mathbf{Q})$ は最小値 ω_1^2 を取る。 $1 \leq \kappa \leq N$ として、 $\xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{\kappa-1} = 0$ のときには

$$U(\mathbf{Q}) = \sum_{i=\kappa}^N \omega_i^2 \xi_i^2 \geq \omega_\kappa^2 \sum_{i=\kappa}^N \xi_i^2 = \omega_\kappa^2 \tag{5.1.32}$$

であるから、 $\xi_\kappa = 1, \xi_{\kappa+1} = \xi_{\kappa+2} = \dots = \xi_N = 0$ のとき、 $U(\mathbf{Q})$ は最小値 ω_κ^2 を取る。

以上をまとめると

$$\omega_\kappa^2 = \min[U(\mathbf{Q})] = \min[\{\mathbf{Q}\}^T [B] \{\mathbf{Q}\}] \tag{5.1.33a}$$

under

$$T(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [A] \{\mathbf{Q}\} = 1 \tag{5.1.33b}$$

$$T(\mathbf{Q}, \hat{Q}_i) = \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [A] \{\hat{Q}_i\} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1) \tag{5.1.33c}$$

という最小値問題の最小値は固有値 ω_κ^2 であり、最小値を与えるベクトルは固有ベクトル $\{\hat{Q}_\kappa\}$ である。

(5.1.33)式の最小値問題は

$$\omega_\kappa^2 = \min \left[\frac{U(\mathbf{Q})}{T(\mathbf{Q})} \right] = \min \left[\frac{\{\mathbf{Q}\}^T [B] \{\mathbf{Q}\}}{\{\mathbf{Q}\}^T [A] \{\mathbf{Q}\}} \right] \tag{5.1.34a}$$

under

$$T(\mathbf{Q}, \hat{\mathbf{Q}}_i) = \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [\mathbf{A}] \{\hat{\mathbf{Q}}_i\} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1) \quad (5.1.34b)$$

というように，(5.1.33c)式の正規化条件のない形で考えてもよい。(5.1.34)式の最小値問題は，レイリーの原理(Rayleigh's Principle)と呼ばれる。

(5.1.33)式で与えられる最小値問題において，(5.1.33c)式と異なる直交条件を考えてみよう。すなわち，固有ベクトル $\hat{\mathbf{Q}}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1$) の代わりに，固有ベクトル $\mathbf{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1$) を考えると，固有値の最小最大の原理(minimum-maximum principle)

$$\omega_{\kappa}^2 = \max_{\mathbf{V}} [U(\mathbf{Q}(\mathbf{V}))] \quad (5.1.35a)$$

where

$$U(\mathbf{Q}(\mathbf{V})) = \min_{\mathbf{Q}} [U(\mathbf{Q})] \quad (5.1.35b)$$

under

$$T(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{Q}\} = 1 \quad (5.1.35c)$$

$$T(\mathbf{Q}, \mathbf{V}_i) = \frac{1}{2} \{\mathbf{Q}\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{V}_i\} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1) \quad (5.1.35d)$$

になる。ここで， $\mathbf{V}$ は固有ベクトル $\mathbf{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1$) を表す。この原理によれば，特定の $\mathbf{V}$ に対して求めた最小値 $U(\mathbf{Q}(\mathbf{V}))$ に関して， $\mathbf{V}$ を変化させたときの最大値は ω_{κ}^2 に等しい。

この最小・最大の原理を証明してみよう。 $\mathbf{Q}$ と $\mathbf{V}_i$ ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1$) を固有ベクトル展開して

$$\mathbf{Q} = \sum_{j=1}^N \xi_j \hat{\mathbf{Q}}_j \quad (5.1.36a)$$

$$\mathbf{V}_i = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \hat{\mathbf{Q}}_j, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1) \quad (5.1.36b)$$

とすると，(5.1.35)式を

$$\omega_{\kappa}^2 = \max_{\alpha} [U(\mathbf{Q}(\alpha))] \quad (5.1.37a)$$

where

$$U(\mathbf{Q}(\mathbf{a})) = \min_{\mathbf{Q}} [U(\mathbf{Q})] \quad (5.1.37b)$$

under

$$T(\mathbf{Q}) = \sum_{i=1}^N \xi_i^2 = 1 \quad (5.1.37c)$$

$$T(\mathbf{Q}, \mathbf{V}_i) = \sum_{i=1}^N \alpha_{ij} \xi_j = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1) \quad (5.1.37d)$$

と書き直すことができる。ここで, $\mathbf{a}$ は α_{ij} ($i = 1, 2, \dots, \kappa - 1; j = 1, 2, \dots, N$) を表す。

まず, (5.1.37b ~ d) 式で与えられる最小値問題で求まる最小値は α_{ij} の関数であるので, $U(\mathbf{Q}(\mathbf{a}))$ としている。つぎに

$$\xi_{\kappa+1}^* = \xi_{\kappa+2}^* = \dots = \xi_N^* = 0 \quad (5.1.38)$$

とすると, これと(5.1.37c)式と(5.1.37d)式より ξ_j^* ($j = 1, 2, \dots, N$) は一意に定まる。これによる $U(\mathbf{Q})$ の値を, $U(\mathbf{Q}^*)$ とする。当然

$$U(\mathbf{Q}(\mathbf{a})) \leq U(\mathbf{Q}^*) \quad (5.1.39)$$

が成り立つ。一方

$$U(\mathbf{Q}^*) = \sum_{i=1}^{\kappa} \omega_i^2 \xi_i^2 \leq \omega_{\kappa}^2 \sum_{i=1}^{\kappa} \xi_i^2 = \omega_{\kappa}^2 \quad (5.1.40)$$

であるので

$$U(\mathbf{Q}(\mathbf{a})) \leq \omega_{\kappa}^2 \quad (5.1.41)$$

がいえる。

さらに

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}, \quad (i = 1, 2, \dots, \kappa - 1; j = 1, 2, \dots, N) \quad (5.1.42)$$

のとき, (5.1.35d) 式より

$$\xi_1^{**} = \xi_2^{**} = \dots = \xi_{\kappa-1}^{**} = 0 \quad (5.1.43)$$

となる。したがって

$$U(\mathbf{Q}^{**}) = \sum_{i=\kappa}^N \omega_i^2 \xi_i^2 \geq \omega_{\kappa}^2 \sum_{i=\kappa}^N \xi_i^2 = \omega_{\kappa}^2 \quad (5.1.44)$$

が成り立つ。すなわち

$$\omega_{\kappa}^2 = \min_{\mathbf{Q}^{**}} [U(\mathbf{Q}^{**})] \quad (5.1.45)$$

となる。故に, ω_{κ}^2 は $U(\mathbf{Q}(\mathbf{a}))$ の最大値である。

(5.1.12)式で与えられる固有値問題

$$[B]\{Q\} - \omega^2 [A]\{Q\} = 0 \quad (5.1.12)$$

において，正規化条件

$$T(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \{Q\}^T [A] \{Q\} = 1 \quad (5.1.46)$$

を課して，解が一意に定まるようにすると，この固有値問題は最小値問題

$$U(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \{Q\}^T [B] \{Q\} = \min \quad (5.1.47a)$$

under

$$T(\mathbf{Q}) = \frac{1}{2} \{Q\}^T [A] \{Q\} = 1 \quad (5.1.47b)$$

と等価である。 ω^2 を Lagrange の未定乗数と考えて，付帯条件を緩和すると，(5.1.12)式が停留条件になる。

つぎに，有限自由度の振動系の強制振動について考えてみよう。一般力を $2f_i$ ， ($i=1,2,\dots,N$) とすると，外力のポテンシャル W は

$$W = -\sum_{i=1}^N f_i q_i \quad (5.1.48)$$

となる。この場合の Lagrangian L は

$$\begin{aligned} L &= T - U - W \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} q_i q_j + 2 \sum_{i=1}^N f_i q_i \end{aligned} \quad (5.1.49)$$

で与えられる。したがって，運動方程式

$$\frac{dL_{\dot{q}_i}}{dt} - L_{q_i} = 0, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (5.1.5)$$

を具体的に求めると

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^N b_{ij} q_j = f_i, \quad (i=1,2,\dots,N) \quad (5.1.50)$$

または

$$[A]\{\ddot{q}\} + [B]\{q\} = \{f\} \quad (5.1.51)$$

となる。ここで

$$\{f\} = [f_1, f_2, \dots, f_N]^T \quad (5.1.52)$$

とする。

ベクトル $\{q(t)\}, \{f(t)\}$ を固有ベクトル展開して

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^N \xi_i(t) \{\hat{Q}_i\} \quad (5.1.53a)$$

$$\{f(t)\} = \sum_{i=1}^N \eta_i(t) [A] \{\hat{Q}_i\} \quad (5.1.53b)$$

とする。ここで

$$\eta_i(t) = \{\hat{Q}_i\}^T \{f(t)\} \quad (5.1.54)$$

である。(5.1.52)式を(5.1.50)式に代入すると

$$\sum_{i=1}^N \ddot{\xi}_j [A] \{\hat{Q}_j\} + \sum_{i=1}^N \xi_j [B] \{\hat{Q}_j\} = \sum_{i=1}^N \eta_j [A] \{\hat{Q}_j\} \quad (5.1.55)$$

となる。この式の両辺に $1/2 \{\hat{Q}_i\}^T$ を掛けて、(5.1.22)式と(5.1.24)式を用いると

$$\ddot{\xi}_i + \omega^2 \xi_i = \eta_i(t) \quad (5.1.56)$$

となる。

デュアメル(Duhamel)の公式を用いると、(5.1.56)式は直ちに積分できて

$$\begin{aligned} \xi_i(t) &= \xi_i(0) \cos \omega t + \frac{1}{\omega} \dot{\xi}_i(0) \sin \omega t \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^t \eta_i(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \end{aligned} \quad (5.1.57)$$

となる。