

§ 4.4 有限要素法

本節では，線型弾性学の一般的な問題を例にとって，有限要素法 (FEM: Finite Element Method) について述べる。

§ 4.2 の最後に線型弾性学の一般的な問題に対する Ritz 法による数値解法を示した。変位 u, v, w を (4.2.68) 式のように関数展開する必要があるが，実はこのことが簡単ではないし，個々の問題に最も適した関数系をその都度選び出さねばならないので，必ずしも汎用的な方法とは言い難い。計算機の強力な計算力を前提にして，もっと汎用的，機械的な方法として開発されたのが有限要素法である。

有限要素法は，対象となるもの(この場合は弾性体)を有限個の要素の集まりと見なし，要素内で成り立つべき条件，要素間で成り立つべき条件，境界において成り立つべき条件を変分法で求めている。弾性体全体を対象とすると，複雑な変形を仮定しなければならないが，要素に分けると，要素内では簡単な変形を仮定すればよいことになる。一つ一つの要素の中では簡単な変形を仮定しても，全体としては複雑な変形を表現できるからである。いわば，Ritz 法の一つの拡張である。

以下においては，簡単のために，平面応力問題(平板内の 2 次元応力問題)を例にとって述べる。すなわち，弾性体の支配方程式((4.1.11 ~ 13) 式)は，下記の(4.4.1 ~ 3)式により与えられる。弾性体を Ω ， Ω の境界を $S = S_M + S_K$ とする。 S_M および S_K は，それぞれ力学的および運動学的条件の与えられる境界である。座標その他は，§ 4.1 を参照されたい。

力学的条件 $[M]$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + g &= 0 \end{aligned} \quad \text{in } \Omega \quad (4.4.1a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y &= X, \\ \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y &= Y \end{aligned} \quad \text{on } S_M \quad (4.4.1b)$$

運動学的条件 $[K]$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{in } \Omega \quad (4.4.2a)$$

$$u = \xi, \quad v = \eta \quad \text{on } S_K \quad (4.4.2b)$$

物性学的条件 $[P_{\sigma\varepsilon}]$:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.4.3a)$$

または $[P_{\varepsilon\sigma}]$:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4.4.3b)$$

ポテンシャル・エネルギー最小の原理は, (4.1.18)式を2次元の場合に書き直すことにより

$$\begin{aligned} I[u, \nu, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] &= \iint_{\Omega} A(\varepsilon) dx dy \\ &\quad - \iint_{\Omega} (f u + g v) dx dy - \int_{S_M} (X u + Y v) ds \\ &= \min \\ &\text{under } [K] \text{ and } [P_{\sigma\varepsilon}] \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

で与えられる。ここで

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} (\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}^2) \\ &= \frac{1}{2} [\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \gamma_{xy}]^T \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

である。また, 平板の厚さは単位量を仮定している。

弾性体領域 Ω を N 個の要素 $\Omega^{(n)}$, ($n=1, 2, \dots, N$) に分割する。 Ω の境界 $S = S_M + S_K$ の内, $\Omega^{(n)}$ に属するものを $S^{(n)} = S_M^{(n)} + S_K^{(n)}$ とすると, (4.4.4)式より

$$\begin{aligned} I[u, \nu, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] &= \sum_{n=1}^N I^{(n)}[u, \nu, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] = \min \\ &\text{under } [K] \text{ and } [P_{\sigma\varepsilon}] \end{aligned}$$

(4.4.6)

となる。ここで

$$I^{(n)}[u, v, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] = \iint_{\Omega^{(n)}} A(\varepsilon) dx dy - \iint_{\Omega^{(n)}} (f u + g v) dx dy - \int_{S_M^{(n)}} (X u + Y v) ds \quad (4.4.7)$$

とする。

図 4.4.1 に示すように、領域 Ω を 3 角形要素 $\Omega^{(n)}$, ($n = 1, 2, \dots, N$) に分割するものとし要素 $\Omega^{(n)}$ の節点を 1, 2, 3 とする。

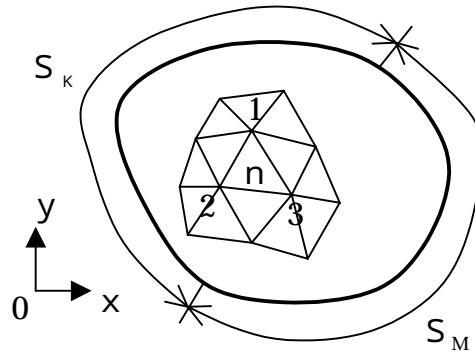


図 4.4.1 3 角形要素による分割

要素 $\Omega^{(n)}$ 内における変位 u, v を x, y の 1 次式

$$\begin{aligned} u(x, y) &= a_0^{(n)} + a_1^{(n)} x + a_2^{(n)} y, \\ v(x, y) &= b_0^{(n)} + b_1^{(n)} x + b_2^{(n)} y \end{aligned} \quad \text{in } \Omega^{(n)} \quad (4.4.8)$$

で近似することにする。節点 1, 2, 3 における変位の x 成分を $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ とし、 y 成分を $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)}$ とすると

$$\begin{Bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(n)} & y_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(n)} & y_2^{(n)} \\ 1 & x_3^{(n)} & y_3^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_0^{(n)} \\ a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.4.9a)$$

$$\begin{Bmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ v_3^{(n)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1^{(n)} & y_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(n)} & y_2^{(n)} \\ 1 & x_3^{(n)} & y_3^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} b_0^{(n)} \\ b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.4.9b)$$

となり、 $u_1^{(n)}, u_2^{(n)}, u_3^{(n)}$ と $a_0^{(n)}, a_1^{(n)}, a_2^{(n)}$ および $v_1^{(n)}, v_2^{(n)}, v_3^{(n)}$ と $b_0^{(n)}, b_1^{(n)}, b_2^{(n)}$ を一

意に対応づけられる。(4.4.9)式を解くと

$$\begin{Bmatrix} a_0^{(n)} \\ a_1^{(n)} \\ a_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^{(n)}} \begin{bmatrix} x_2^{(n)} y_3^{(n)} - x_3^{(n)} y_2^{(n)} & x_3^{(n)} y_1^{(n)} - x_1^{(n)} y_3^{(n)} & x_1^{(n)} y_2^{(n)} - x_2^{(n)} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} - y_3^{(n)} & y_3^{(n)} - y_1^{(n)} & y_1^{(n)} - y_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} - x_2^{(n)} & x_1^{(n)} - x_3^{(n)} & x_2^{(n)} - x_1^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{(n)} \\ u_2^{(n)} \\ u_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.4.10a)$$

$$\begin{Bmatrix} b_0^{(n)} \\ b_1^{(n)} \\ b_2^{(n)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta^{(n)}} \begin{bmatrix} x_2^{(n)} y_3^{(n)} - x_3^{(n)} y_2^{(n)} & x_3^{(n)} y_1^{(n)} - x_1^{(n)} y_3^{(n)} & x_1^{(n)} y_2^{(n)} - x_2^{(n)} y_1^{(n)} \\ y_2^{(n)} - y_3^{(n)} & y_3^{(n)} - y_1^{(n)} & y_1^{(n)} - y_2^{(n)} \\ x_3^{(n)} - x_2^{(n)} & x_1^{(n)} - x_3^{(n)} & x_2^{(n)} - x_1^{(n)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1^{(n)} \\ v_2^{(n)} \\ v_3^{(n)} \end{Bmatrix} \quad (4.4.10b)$$

となる。ただし, $\Delta^{(n)}$ は

$$\Delta^{(n)} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1^{(n)} & y_1^{(n)} \\ 1 & x_2^{(n)} & y_2^{(n)} \\ 1 & x_3^{(n)} & y_3^{(n)} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} [(x_2^{(n)} - x_1^{(n)})(y_3^{(n)} - y_1^{(n)}) - (x_3^{(n)} - x_1^{(n)})(y_2^{(n)} - y_1^{(n)})] \quad (4.4.11)$$

で, $\Omega^{(n)}$ の面積である。

$\Omega^{(n)}$ における歪み $\varepsilon_x^{(n)}$, $\varepsilon_y^{(n)}$, $\gamma_{xy}^{(n)}$ を求めると

$$\varepsilon_x^{(n)} = \frac{\partial u}{\partial x} = a_1^{(n)} = \frac{y_2^{(n)} - y_3^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_1^{(n)} + \frac{y_3^{(n)} - y_1^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_2^{(n)} + \frac{y_1^{(n)} - y_2^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_3^{(n)} \quad (4.4.12a)$$

$$\varepsilon_y^{(n)} = \frac{\partial v}{\partial y} = b_2^{(n)} = \frac{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_1^{(n)} + \frac{x_1^{(n)} - x_3^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_2^{(n)} + \frac{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_3^{(n)} \quad (4.4.12b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^{(n)} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = a_2^{(n)} + b_1^{(n)} \\ &= \frac{x_3^{(n)} - x_2^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_1^{(n)} + \frac{x_1^{(n)} - x_3^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_2^{(n)} + \frac{x_2^{(n)} - x_1^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} u_3^{(n)} \\ &\quad + \frac{y_2^{(n)} - y_3^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_1^{(n)} + \frac{y_3^{(n)} - y_1^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_2^{(n)} + \frac{y_1^{(n)} - y_2^{(n)}}{2\Delta^{(n)}} v_3^{(n)} \end{aligned} \quad (4.4.12c)$$

となる。マトリクスを使って書き直すと

$$\{\varepsilon^{(n)}\} = [B^{(n)}] \{u^{(n)}\} \quad (4.4.13)$$

と表現できる。ここで

$$\{\varepsilon^{(n)}\} = [\varepsilon_x^{(n)}, \varepsilon_y^{(n)}, \gamma_{xy}^{(n)}]^T \quad (4.4.14a)$$

$$\{u^{(n)}\} = [u_1^{(n)}, v_1^{(n)}, u_2^{(n)}, v_2^{(n)}, u_3^{(n)}, v_3^{(n)}]^T \quad (4.4.14b)$$

$$[B^{(n)}] = \frac{1}{2\Delta^{(n)}} \cdot \begin{bmatrix} y_2^{(n)} - y_3^{(n)} & 0 & y_3^{(n)} - y_1^{(n)} & 0 & y_1^{(n)} - y_2^{(n)} & 0 \\ 0 & x_3^{(n)} - x_2^{(n)} & 0 & x_1^{(n)} - x_3^{(n)} & 0 & x_2^{(n)} - x_1^{(n)} \\ x_3^{(n)} - x_2^{(n)} & y_2^{(n)} - y_3^{(n)} & x_1^{(n)} - x_3^{(n)} & y_3^{(n)} - y_1^{(n)} & x_2^{(n)} - x_1^{(n)} & y_1^{(n)} - y_2^{(n)} \end{bmatrix} \quad (4.4.14c)$$

とする。

(4.4.3a)式の $[P_{\sigma\varepsilon}]$ を

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \quad (4.4.15)$$

と書くことにする。ここで

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}]^T \quad (4.4.16a)$$

$$[E] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.4.16b)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T \quad (4.4.16c)$$

とする。このとき, (4.4.5)式より

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} \quad (4.4.17)$$

と書ける。 $\Omega^{(n)}$ において $\{\varepsilon\}$ は定数であるので, (4.4.13)式と(4.4.17)式より

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega^{(n)}} A(\varepsilon) dx dy &= \frac{1}{2} \Delta^{(n)} \{\varepsilon^{(n)}\}^T [E^{(n)}] \{\varepsilon^{(n)}\} \\ &= \frac{1}{2} \{u^{(n)}\}^T [K^{*(n)}] \{u^{(n)}\} \end{aligned} \quad (4.4.18)$$

となる。ここで

$$[K^{*(n)}] = \Delta^{(n)} [B^{(n)}]^T [E^{(n)}] [B^{(n)}] \quad (4.4.19)$$

とする。 $[K^{*(n)}]$ は要素 n の剛性マトリクスと呼ばれる。

つぎに, 外力 f, g によるポテンシャルについては, f, g が要素内で一定, すなわち $f^{(n)}, g^{(n)}$ であると仮定する。一方

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^{(n)}} x \, dx dy &= \frac{1}{3}(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)})\Delta^{(n)} \\ \iint_{\Omega^{(n)}} y \, dx dy &= \frac{1}{3}(y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + y_3^{(n)})\Delta^{(n)}\end{aligned}\quad (4.4.20)$$

である。したがって

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^{(n)}} u \, dx dy &= \iint_{\Omega^{(n)}} (a_0 + a_1 x + a_2 y) \, dx dy \\ &= a_0 \Delta^{(n)} + a_1 \frac{1}{3}(x_1^{(n)} + x_2^{(n)} + x_3^{(n)})\Delta^{(n)} + a_2 \frac{1}{3}(y_1^{(n)} + y_2^{(n)} + y_3^{(n)})\Delta^{(n)} \\ &= \frac{1}{3}[(a_0 + a_1 x_1^{(n)} + a_2 y_1^{(n)}) + (a_0 + a_1 x_2^{(n)} + a_2 y_2^{(n)}) + (a_0 + a_1 x_3^{(n)} + a_2 y_3^{(n)})]\Delta^{(n)} \\ &= \frac{1}{3}(u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + u_3^{(n)})\Delta^{(n)}\end{aligned}\quad (4.4.21a)$$

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^{(n)}} v \, dx dy &= \iint_{\Omega^{(n)}} (b_0 + b_1 x + b_2 y) \, dx dy \\ &= \frac{1}{3}(v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + v_3^{(n)})\Delta^{(n)}\end{aligned}\quad (4.4.21b)$$

であるので

$$\begin{aligned}\iint_{\Omega^{(n)}} (fu + gv) \, dx dy &= f^{(n)} \iint_{\Omega^{(n)}} u \, dx dy + g^{(n)} \iint_{\Omega^{(n)}} v \, dx dy \\ &= \frac{1}{3} f^{(n)} \Delta^{(n)} (u_1^{(n)} + u_2^{(n)} + u_3^{(n)}) + \frac{1}{3} g^{(n)} \Delta^{(n)} (v_1^{(n)} + v_2^{(n)} + v_3^{(n)}) \\ &= \{u^{(n)}\}^T \{f^{*(n)}\}\end{aligned}\quad (4.4.22)$$

と書ける。ここで

$$\{f^{*(n)}\} = \frac{1}{3} \Delta^{(n)} [f^{(n)}, g^{(n)}, f^{(n)}, g^{(n)}, f^{(n)}, g^{(n)}]^T \quad (4.4.23)$$

とする。(4.4.22)式の形は、節点1,2,3に x, y 方向の集中力 $f^{(n)}\Delta^{(n)}/3, g^{(n)}\Delta^{(n)}/3$ が作用している場合と同じである。

さらに、境界に働く外力 X, Y によるポテンシャルについて考える。 X, Y が要素上で一定、すなわち要素 n の接点 i, j を結ぶ辺 $S_{ij}^{(n)}$ の上で $X_{ij}^{(n)}, Y_{ij}^{(n)}$ ($ij=12, 23, 31$)とする。辺 $S_{ij}^{(n)}$ が境界 $S_M^{(n)}$ に属していない場合には $X_{ij}^{(n)}, Y_{ij}^{(n)}=0$ とする。そうすると、境界に働く外力 X, Y によるポテンシャルは

$$\begin{aligned}
& \int_{S_M^{(n)}} (Xu + Yv) ds \\
&= X_{12}^{(n)} \int_{S_{12}^{(n)}} u ds + X_{23}^{(n)} \int_{S_{23}^{(n)}} u ds + X_{31}^{(n)} \int_{S_{31}^{(n)}} u ds \\
&\quad + Y_{12}^{(n)} \int_{S_{12}^{(n)}} v ds + Y_{23}^{(n)} \int_{S_{23}^{(n)}} v ds + Y_{31}^{(n)} \int_{S_{31}^{(n)}} v ds
\end{aligned} \tag{4.4.24}$$

と書ける。辺 $S_{ij}^{(n)}$ の長さを $\Delta s_{ij}^{(n)}$ とすると

$$\int_{S_{ij}^{(n)}} u ds = \int_0^{\Delta s_{ij}^{(n)}} \left(u_i^{(n)} + \frac{u_j^{(n)} - u_i^{(n)}}{\Delta s_{ij}^{(n)}} s \right) ds = \frac{1}{2} (u_i^{(n)} + u_j^{(n)}) \Delta s_{ij}^{(n)} \tag{4.4.25a}$$

$$\int_{S_{ij}^{(n)}} v ds = \int_0^{\Delta s_{ij}^{(n)}} \left(v_i^{(n)} + \frac{v_j^{(n)} - v_i^{(n)}}{\Delta s_{ij}^{(n)}} s \right) ds = \frac{1}{2} (v_i^{(n)} + v_j^{(n)}) \Delta s_{ij}^{(n)} \tag{4.4.25b}$$

であるので

$$\begin{aligned}
& \int_{S_M^{(n)}} (Xu + Yv) ds \\
&= \frac{1}{2} X_{12}^{(n)} (u_1^{(n)} + u_2^{(n)}) \Delta s_{12}^{(n)} + \frac{1}{2} X_{23}^{(n)} (u_2^{(n)} + u_3^{(n)}) \Delta s_{23}^{(n)} + \frac{1}{2} X_{31}^{(n)} (u_3^{(n)} + u_1^{(n)}) \Delta s_{31}^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2} Y_{12}^{(n)} (v_1^{(n)} + v_2^{(n)}) \Delta s_{12}^{(n)} + \frac{1}{2} Y_{23}^{(n)} (v_2^{(n)} + v_3^{(n)}) \Delta s_{23}^{(n)} + \frac{1}{2} Y_{31}^{(n)} (v_3^{(n)} + v_1^{(n)}) \Delta s_{31}^{(n)} \\
&= \frac{1}{2} (X_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)} + X_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)}) u_1^{(n)} + \frac{1}{2} (X_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} + X_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)}) u_2^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2} (X_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + X_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)}) u_3^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2} (Y_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)} + Y_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)}) v_1^{(n)} + \frac{1}{2} (Y_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} + Y_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)}) v_2^{(n)} \\
&\quad + \frac{1}{2} (Y_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + Y_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)}) v_3^{(n)} \\
&= \{u^{(n)}\}^T \{X^*{}^{(n)}\}
\end{aligned} \tag{4.4.26}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
\{X^*{}^{(n)}\} = & \left[\frac{1}{2} (X_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)} + X_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)}), \frac{1}{2} (Y_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)} + Y_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)}), \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (X_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} + X_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)}), \frac{1}{2} (Y_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} + Y_{12}^{(n)} \Delta s_{12}^{(n)}), \right. \\
& \left. \frac{1}{2} (X_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + X_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)}), \frac{1}{2} (Y_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + Y_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)}) \right]
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \left(X_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + X_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} \right), \frac{1}{2} \left(Y_{31}^{(n)} \Delta s_{31}^{(n)} + Y_{23}^{(n)} \Delta s_{23}^{(n)} \right) \Big] ^T \quad (4.4.27)$$

である。

(4.4.18)式, (4.4.22)式, (4.4.27)式を(4.4.7)式に代入すると

$$\begin{aligned} I^{(n)}(u_1^{(n)}, v_1^{(n)}, u_2^{(n)}, v_2^{(n)}, u_3^{(n)}, v_3^{(n)}) \\ = \frac{1}{2} \{u^{(n)}\}^T [K^{*(n)}] \{u^{(n)}\} - \{u^{(n)}\}^T \{f^{*(n)}\} - \{u^{(n)}\}^T \{X^{*(n)}\} \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

となる。この式は, 要素 n の変位ベクトル $\{u^{(n)}\}$ で表現されているが, 全体の
変位ベクトルによる表現に書き直す。

弾性体全体 $\Omega = \Omega^{(1)} + \Omega^{(2)} + \dots + \Omega^{(N)}$ の節点数を M とする。要素 n の i 番目の
節点が, 全体では $v(n, i)$ 番目の節点であるとし, 全体の節点変位ベクトル $\{u\}$
を

$$\{u\} = [u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_M, v_M]^T \quad (4.4.29)$$

で定義すると

$$\begin{aligned} u_i^{(n)} &= u_{v(n,i)} \\ v_i^{(n)} &= v_{v(n,i)} \end{aligned} \quad (4.4.30)$$

という関係になる。すなわち, $\{u^{(n)}\}$ の $2i-1$ 番目の要素が $\{u\}$ の $2v(n, i)-1$ 番
目の要素に, $\{u^{(n)}\}$ の $2i$ 番目の要素が $\{u\}$ の $2v(n, i)$ 番目の要素に対応する。
これらの関係を使って, (4.4.28)式を書き直すと

$$I^{(n)} = \frac{1}{2} \{u\}^T [K^{(n)}] \{u\} - \{u\}^T \{f^{(n)}\} - \{u\}^T \{X^{(n)}\} \quad (4.4.31)$$

となる。ここで, $[K^{(n)}]$ は $M \times M$ の行列で, $[K^{*(n)}]$ の $\begin{Bmatrix} 2i-1 \\ 2i \end{Bmatrix}$ 行 $\begin{Bmatrix} 2j-1 \\ 2j \end{Bmatrix}$ 列の

要素を $\begin{Bmatrix} 2v(n, i)-1 \\ 2v(n, i) \end{Bmatrix}$ 行 $\begin{Bmatrix} 2v(n, j)-1 \\ 2v(n, j) \end{Bmatrix}$ 列に移したもの, $\{f^{(n)}\}$ は要素数 M のベク

トルで, $\{f^{*(n)}\}$ の $\begin{Bmatrix} 2i-1 \\ 2i \end{Bmatrix}$ 番目の要素を $\begin{Bmatrix} 2v(n, i)-1 \\ 2v(n, i) \end{Bmatrix}$ 番目の要素に移したもの,

$\{X^{(n)}\}$ は要素数 M のベクトルで, $\{X^{*(n)}\}$ の $\begin{Bmatrix} 2i-1 \\ 2i \end{Bmatrix}$ 番目の要素を $\begin{Bmatrix} 2v(n, i)-1 \\ 2v(n, i) \end{Bmatrix}$ 番

目の要素に移したものである。すなわち

$$[K^{(n)}]_{\substack{\{2v(n,i)-1\} \\ \{2v(n,i)\}}} \substack{\{2v(n,j)-1\} \\ \{2v(n,j)\}} = [K^{*(n)}]_{\substack{\{2i-1\} \\ \{2i\}}} \substack{\{2j-1\} \\ \{2j\}} \quad (4.4.32a)$$

$$\{f^{(n)}\}_{\substack{\{2v(n,i)-1\} \\ \{2v(n,i)\}}} = \{f^{*(n)}\}_{\substack{\{2i-1\} \\ \{2i\}}} \quad (4.4.32b)$$

$$\{X^{(n)}\}_{\substack{\{2v(n,i)-1\} \\ \{2v(n,i)\}}} = \{X^{*(n)}\}_{\substack{\{2i-1\} \\ \{2i\}}} \quad (4.4.32c)$$

である。

(4.4.31)式を(4.4.6)式に代入すると

$$I = \sum_{n=1}^N I_n = \frac{1}{2} \{u\}^T [K] \{u\} - \{u\}^T \{f\} - \{u\}^T \{X\} = \min$$

under (4.4.2b)

(4.4.33)

となる。ここで

$$\begin{aligned} [K] &= \sum_{n=1}^N [K^{(n)}], \\ \{f\} &= \sum_{n=1}^N \{f^{(n)}\}, \\ \{X\} &= \sum_{n=1}^N \{X^{(n)}\} \end{aligned} \quad (4.4.34)$$

とする。

運動学的な境界条件(4.4.2b)式により， $\{u\}$ の $2M$ 個の要素の中には，値が固定されていて自由でないものがある。そこで，以後の計算に便利なように， $\{u\}$ を並び替える。すなわち， $2M$ 個の要素を上から順番に見て行って，例えば i 番目に自由でない要素が出てきたら，その要素を一番最後に移す。それと同時に， $[K]$ の i 行と i 列を，一番最後の行と列に移す。また， $\{f\}$ と $\{X\}$ の i 番目の要素を一番最後に移す。この操作を繰り返すと， $\{u\}$ の前の方に自由な要素が，後ろの方に自由でない要素が並ぶことになる。すなわち

$$\{u\} = [u_1, u_2]^T \quad (4.4.35)$$

となる。ここで， $\{u_1\}$ は自由な要素を， $\{u_2\}$ は自由でない要素を表すものとする。これに合わせて， $[K]$ ， $\{f\}$ ， $\{X\}$ も

$$\begin{aligned}
[K] &= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}, \\
\{f\} &= [f_1, f_2]^T, \\
\{X\} &= [X_1, X_2]^T
\end{aligned}
\tag{4.4.36}$$

と書くことにする。これらを用いて，(4.4.33)式を書き直すと

$$\begin{aligned}
I = I(u_1) &= \frac{1}{2} [u_1, u_2]^T \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} - [u_1, u_2]^T \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} - [u_1, u_2]^T \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \{u_1\}^T [K_{11}] \{u_1\} + \frac{1}{2} \{u_1\}^T [K_{12}] \{u_2\} + \frac{1}{2} \{u_2\}^T [K_{21}] \{u_1\} \\
&\quad - \{u_1\}^T \{f_1\} - \{u_1\}^T \{X_1\} \\
&\quad + \frac{1}{2} \{u_2\}^T [K_{22}] \{u_2\} - \{u_2\}^T \{f_2\} - \{u_2\}^T \{X_2\} = \min
\end{aligned}
\tag{4.4.37}$$

となる。

したがって，停留条件は

$$0 = \delta I = \{\delta u_1\}^T [[K_{11}]\{u_1\} + [K_{12}]\{u_2\} - \{f_1\} - \{X_1\}] \tag{4.4.38}$$

で与えられる。ここで， $[K]$ の対称性，すなわち

$$[K_{11}] = [K_{11}]^T, \quad [K_{12}] = [K_{21}]^T \tag{4.4.39}$$

が用いられている。(4.4.38)式より， $\{u_1\}$ に関する連立一次方程式

$$[K_{11}]\{u_1\} = -[K_{12}]\{u_2\} + \{f_1\} + \{X_1\} \tag{4.4.40}$$

を得るので，これを解いて $\{u_1\}$ を求めればよい。

式に書いて論理を追うと，幾分複雑に見えるが，計算機のプログラミングはそれほど難しくないと述べておく。

以上で述べた有限要素法のアルゴリズムに対する理解を深めるために，簡単な数値計算例を説明する。

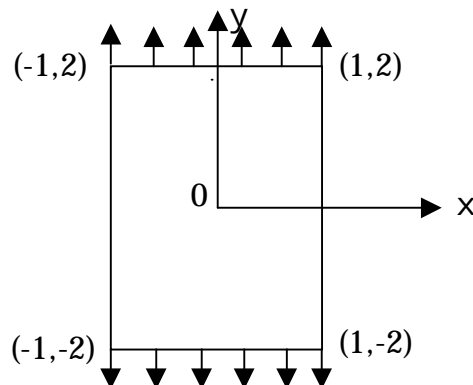


図 4.4.2 一様な引き張りを受ける平板

図 4.4.2 に示されるように，単位長あたり単位で力で一様に引き張られる単位の厚さの平板を考えよう。

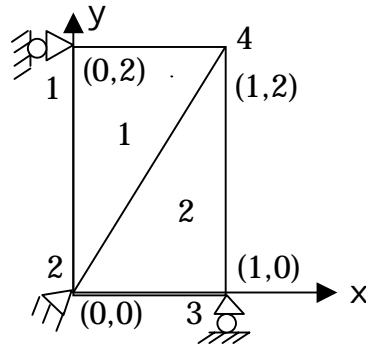


図 4.4.3 対称性の導入

対称性を考慮すると，図 4.4.3 に示されるように，右上の 1/4 領域を，図に示されるような拘束条件で考えればよいことになる。要素1と要素2の2要素に分割し，図に示されるように全体での節点番号を付ける。節点の座標を表 4.4.1 に示す。また，表 4.4.2 に境界節点の運動学的条件を示す。つぎに，図 4.4.4 に示されるように，要素内での節点番号を付ける。要素内の節点と全体の節点番号の対応を表 4.4.3 に示す。

表 4.4.1 節点の座標

節点	x 座標	y 座標
1	0	2
2	0	0
3	1	0
4	1	2

表 4.4.2 境界節点の運動学的条件

節点	u 変位	v 変位
1	0	自由
2	0	0
3	自由	0

4	自由	自由
---	----	----

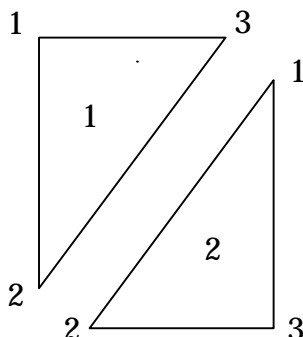


図 4.4.4 要素内の節点番号

表 4.4.3 節点番号対応表

要素	要素内	全体
1	1	1
	2	2
	3	4
2	1	4
	2	2
	3	3

まず、要素1について計算する。要素1の面積 $\Delta^{(1)}$ は、(4.4.11)式より

$$\begin{aligned}\Delta^{(1)} &= \frac{1}{2} [(x_2^{(1)} - x_1^{(1)})(y_3^{(1)} - y_1^{(1)}) - (x_3^{(1)} - x_1^{(1)})(y_2^{(1)} - y_1^{(1)})] \\ &= \frac{1}{2} [(0-0)(2-2) - (1-0)(0-2)] = 1\end{aligned}\quad (4.4.41)$$

となる。(4.4.14c)式より、 $[B^{(1)}]$ は

$$\begin{aligned}[B^{(1)}] &= \frac{1}{2\Delta^{(1)}} \cdot \begin{bmatrix} y_2^{(1)} - y_3^{(1)} & 0 & y_3^{(1)} - y_1^{(1)} & 0 & y_1^{(1)} - y_2^{(1)} & 0 \\ 0 & x_3^{(1)} - x_2^{(1)} & 0 & x_1^{(1)} - x_3^{(1)} & 0 & x_2^{(1)} - x_1^{(1)} \\ x_3^{(1)} - x_2^{(1)} & y_2^{(1)} - y_3^{(1)} & x_1^{(1)} - x_3^{(1)} & y_3^{(1)} - y_1^{(1)} & x_2^{(1)} - x_1^{(1)} & y_1^{(1)} - y_2^{(1)} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4.4.42)$$

となり， $\nu=0.3$ とすると，(4.4.16b)式より $[E^{(1)}]$ は

$$[E^{(1)}] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \quad (4.4.43)$$

となるので，要素1の剛性マトリクス $[K^{*(1)}]$ は(4.4.19)式より

$$\begin{aligned} [K^{*(1)}] &= \Delta^{(1)} [B^{(1)}]^T [E^{(1)}] [B^{(1)}] \\ &= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 4.35 & -1.3 & -0.35 & 0.6 & -4 & 0.7 \\ -1.3 & 2.4 & 0.7 & -1 & 0.6 & -1.4 \\ -0.35 & 0.7 & 0.35 & 0 & 0 & -0.7 \\ 0.6 & -1 & 0 & 1 & -0.6 & 0 \\ -4 & 0.6 & 0 & -0.6 & 4 & 0 \\ 0.7 & -1.4 & -0.7 & 0 & 0 & 1.4 \end{bmatrix} \quad (4.4.44) \end{aligned}$$

と求まる。同様にして，要素2の剛性マトリクス $[K^{*(2)}]$ は

$$\begin{aligned} [K^{*(2)}] &= \Delta^{(2)} [B^{(2)}]^T [E^{(2)}] [B^{(2)}] \\ &= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0.35 & 0 & 0 & -0.7 & -0.35 & 0.7 \\ 0 & 1 & -0.6 & 0 & 0.6 & -1 \\ 0 & -0.6 & 4 & 0 & -4 & 0.6 \\ -0.7 & 0 & 0 & 1.4 & 0.7 & -1.4 \\ -0.35 & 0.6 & -4 & 0.7 & 4.35 & -1.3 \\ 0.7 & -1 & 0.6 & -1.4 & -1.3 & 2.4 \end{bmatrix} \quad (4.4.45)$$

で与えられる。外力のポテンシャルは(4.4.23)式および(4.4.27)式より

$$\{f^{*(1)}\} = \frac{1}{3} \Delta^{(1)} [f^{(1)}, g^{(1)}, f^{(1)}, g^{(1)}, f^{(1)}, g^{(1)}]^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.46a)$$

$$\{f^{*(2)}\} = \frac{1}{3} \Delta^{(2)} [f^{(2)}, g^{(2)}, f^{(2)}, g^{(2)}, f^{(2)}, g^{(2)}]^T = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.46b)$$

$$\{X^{*(1)}\} = \left[\frac{1}{2} (X_{12}^{(1)} \Delta s_{12}^{(1)} + X_{31}^{(1)} \Delta s_{31}^{(1)}), \dots \right] = [0, 0.5, 0, 0, 0, 0.5]^T \quad (4.4.46c)$$

$$\{X^{*(2)}\} = \left[\frac{1}{2} (X_{12}^{(2)} \Delta s_{12}^{(2)} + X_{31}^{(2)} \Delta s_{31}^{(2)}), \dots \right] = [0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.46b)$$

と求まる。 $[K^{*(n)}]$, $\{f^{*(n)}\}$, $\{X^{*(n)}\}$, ($n=1, 2$) を(4.4.32)式に従って変換すると

$$[K^{(1)}] = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 4.35 & -1.3 & -0.35 & 0.6 & 0 & 0 & -4 & 0.7 \\ -1.3 & 2.4 & 0.7 & -1 & 0 & 0 & 0.6 & -1.4 \\ -0.35 & 0.7 & 0.35 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.7 \\ 0.6 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0.6 & 0 & -0.6 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0.7 & -1.4 & -0.7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.4 \end{bmatrix} \quad (4.4.47a)$$

$$[K^{(2)}] = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -4 & 0.6 & 0 & -0.6 \\ 0 & 0 & 0 & 1.4 & 0.7 & -1.4 & -0.7 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0.7 & 4.35 & -1.3 & -0.35 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1.4 & -1.3 & 2.4 & 0.7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -0.7 & -0.35 & 0.7 & 0.35 & 0 \\ 0 & 0 & -0.6 & 0 & 0.6 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4.4.47b)

$$\{f^{(1)}\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.47c)$$

$$\{f^{(2)}\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.47d)$$

$$\{X^{(1)}\} = [0, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5]^T \quad (4.4.47e)$$

$$\{X^{(2)}\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.47f)$$

となる。(4.4.34)式より，全体の $[K]$ ， $\{f\}$ ， $\{X\}$ を求めると

$$[K] = \sum_{n=1}^2 [K^{(n)}]$$

$$= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 4.35 & -1.3 & -0.35 & 0.6 & 0 & 0 & -4 & 0.7 \\ -1.3 & 2.4 & 0.7 & -1 & 0 & 0 & 0.6 & -1.4 \\ -0.35 & 0.7 & 4.35 & 0 & -4 & 0.6 & 0 & -1.3 \\ 0.6 & -1 & 0 & 2.4 & 0.7 & -1.4 & -1.3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0.7 & 4.35 & -1.3 & -0.35 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.6 & -1.4 & -1.3 & 2.4 & 0.7 & -1 \\ -4 & 0.6 & 0 & -1.3 & -0.35 & 0.7 & 4.35 & 0 \\ 0.7 & -1.4 & -1.3 & 0 & 0.6 & -1 & 0 & 2.4 \end{bmatrix}$$

(4.4.48a)

$$\{f\} = \sum_{n=1}^2 \{f^{(n)}\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.48b)$$

$$\{X\} = \sum_{n=1}^2 \{X^{(n)}\} = [0, 0.5, 0, 0, 0, 0, 0, 0.5]^T \quad (4.4.48c)$$

と求まる。

表 4.4.2 に示される運動学的条件より，自由節点変位 $\{u_1\}$ は

$$\{u_1\} = [v_1, u_3, u_4, v_4]^T \quad (4.4.49)$$

であり，拘束節点変位 $\{u_2\}$ は

$$\{u_2\} = [u_1, u_2, v_2, v_3]^T = [0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.50)$$

であるので，(4.4.36)式の形に並べ替えると

$$[K] = \frac{E}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 2.4 & 0 & 0.6 & -1.4 & -1.3 & 0.7 & -1 & 0 \\ 0 & 4.35 & -0.35 & 0.6 & 0 & -4 & 0.7 & -1.3 \\ 0.6 & -0.35 & 4.35 & 0 & -4 & 0 & -1.3 & 0.7 \\ -1.4 & 0.6 & 0 & 2.4 & 0.7 & -1.3 & 0 & -1 \\ -1.3 & 0 & -4 & 0.7 & 4.35 & -0.35 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & -4 & 0 & -1.3 & -0.35 & 4.35 & 0 & 0.6 \\ -1 & 0.7 & -1.3 & 0 & 0.6 & 0 & 2.4 & -1.4 \\ 0 & -1.3 & 0.7 & -1 & 0 & 0.6 & -1.4 & 2.4 \end{bmatrix}$$

(4.4.51a)

$$\{f\} = [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.51b)$$

$$\{X\} = [0.5, 0, 0, 0.5, 0, 0, 0, 0]^T \quad (4.4.51c)$$

となる。これより，(4.4.40)式は

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 2.4 & 0 & 0.6 & -1.4 \\ 0 & 4.35 & -0.35 & 0.6 \\ 0.6 & -0.35 & 4.35 & 0 \\ -1.4 & 0.6 & 0 & 2.4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1.3 & 0.7 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 0.7 & -1.3 \\ -4 & 0 & -1.3 & 0.7 \\ 0.7 & -1.3 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{1-\nu^2}{E} \begin{Bmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix} \quad (4.4.52)$$

となるので，これを解くと

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \frac{4(1-\nu^2)}{E} \begin{Bmatrix} 0.5495 \\ -0.0824 \\ -0.0824 \\ 0.5495 \end{Bmatrix} \quad (4.4.53)$$

を得る。

(4.4.13)式より，要素1の歪み $\{\varepsilon^{(1)}\}$ を求めると

$$\{\varepsilon^{(1)}\} = [\varepsilon_x^{(1)}, \varepsilon_y^{(1)}, \gamma_{xy}^{(1)}]^T = [B^{(1)}]\{u^{(1)}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5495 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0824 \\ 0.5495 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{Bmatrix} -0.1648 \\ 0.5495 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.4.54}
\end{aligned}$$

となるので，(4.4.15)式より，要素1の応力 $\{\sigma^{(1)}\}$ は

$$\begin{aligned}
\{\sigma^{(1)}\} &= [\sigma_x^{(1)}, \sigma_y^{(1)}, \tau_{xy}^{(1)}]^T = [E^{(1)}]\{\varepsilon^{(1)}\} \\
&= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{Bmatrix} -0.1648 \\ 0.5495 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0002 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.4.55}
\end{aligned}$$

と求まる。

同様にして，要素2の歪み $\{\varepsilon^{(2)}\}$ は

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon^{(2)}\} &= [\varepsilon_x^{(2)}, \varepsilon_y^{(2)}, \gamma_{xy}^{(2)}]^T = [B^{(2)}]\{u^{(2)}\} \\
&= \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.0824 \\ 0.5495 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0824 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{Bmatrix} -0.1648 \\ 0.5495 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.4.56}
\end{aligned}$$

となり，要素2の応力 $\{\sigma^{(2)}\}$ は

$$\{\sigma^{(2)}\} = [\sigma_x^{(2)}, \sigma_y^{(2)}, \tau_{xy}^{(2)}]^T = [E^{(2)}]\{\varepsilon^{(2)}\}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0 \\ 0.3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.35 \end{bmatrix} \frac{2(1-\nu^2)}{E} \begin{Bmatrix} -0.1648 \\ 0.5495 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ 1.0002 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{4.4.57}
\end{aligned}$$

と求まる。

応力 $\{\sigma^{(1)}\}$, $\{\sigma^{(2)}\}$ は, 正しい値を与えていることが理解されよう。

図 4.4.5 のような孔あき平板の応力分布も, 以上に述べた方法を電子計算機で実行すれば, 簡単に求めることができる。

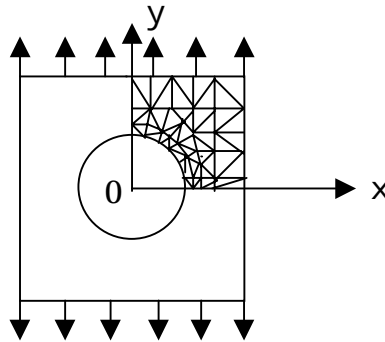


図 4.4.5 孔あき平板

参考文献

- [4.1] 林 毅, 村 外志夫, 「変分法」, 応用数学講座第 13 巻, 日知社, (1958)
- [4.2] 寺沢寛一編, 「数学概論(応用編)」, 岩波書店, (1960)
- [4.3] K. Washizu, VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, (1968).
- [4.4] C L. Dym & I. H. Shames, SOLID MECHANICS : A Variational Approach, Advanced Engineering Series, McGraw-Hill, (1973).
- 砂川 恵 監訳, 「材料力学と変分法」, 理工学海外名著シリーズ 26, フレイ図書出版, (1977).
- [4.5] 戸山隼人, 「マイコンによる有限要素解析」, 培風館
- [4.6] Y. Yamamoto, H. Isshiki, K. Hamada & T. Hayashi, “Stress

Distribution around a Circular Cylinder of a Cylindrical Shell”, J. of the Fac. of Eng., Univ. of Tokyo (B), Vol XXIX, No. 3, (1968)

[4.7] Y. Yamamoto & H. Isshiki, “Variational Principles and Dualistic Scheme For Intersection Problems”, J. of the Fac. of Eng., Univ. of Tokyo (B), Vol XXX, No. 1, (1969)

[4.8] Y. Yamamoto, H. Isshiki, K. Hamada, T. Hayashi & H. Ukaji, “Theory of Stress Concentration of Two Normally Intersecting Cylindrical Shells”, Bulltin of JSME, Vol. 12, No. 49, (1969)