§4.3　Galerkin の方法

Ritz 法と似た方法に Galerkin 法がある。Ritz 法との違いに重点を置いて，Galerkin 法を説明してみたい。

[例 4.3.1]　両端で撓みと曲げﾓ-ﾒﾝﾄが与えられた長さ l の棒の曲げの問題(→§3.2，§4.1～2)を例にとって考える。棒の曲げ剛性は長さ方向の座標 x の関数とし，分布荷重 $f(x)$ が作用しているものとすると，棒のたわみ $w(x)$ は汎関数が(3.2.11a)式, 境界条件が(3.2.17)式で与えられる変分問題を少し書き直した変分問題

$$I[w]=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx$$

$$-\int_0^l f\,w dx-\overline{M_x(0)}w'(0)+\overline{M_x(l)}w'(l)=\min \tag{4.3.1a}$$

under

$$w(0)=\overline{w(0)},\quad w(l)=\overline{w(l)} \tag{4.3.1b}$$

の解である。ここで， $\overline{M_x(0)}, \overline{M_x(l)}$ および $\overline{w(0)}, \overline{w(l)}$ は， $x=0, l$ で与えられる曲げﾓ-ﾒﾝﾄと撓みである。この変分問題の自然条件は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)-f=0,\quad 0<x<l \tag{4.3.2a}$$

$$EI\,w''(0)=-\overline{M_x(0)},\quad EI\,w''(l)=-\overline{M_x(l)} \tag{4.3.2b}$$

である。

棒のたわみ $w(x)$ を

$$w(x)=W_0(x)+\sum_{n=1}^{N}a_nW_n(x),\quad 0\le x\le l \tag{4.3.3}$$

で近似する。ここで， $a_1, a_2, \cdots, a_N$ は未知定数である。$W_n(x)$ は既知の関数で，境界条件(4.3.1b)式を満足しているものとする。すなわち

$$W_0(0)=\overline{w(0)},\quad W_0(l)=\overline{w(l)} \tag{4.3.4a}$$

$$W_n(0)=0,\quad W_n(l)=0,\quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.4b}$$

とする。例えば

$$W_0(x)=-\frac{\overline{w(0)}}{l}(x-l)+\frac{\overline{w(l)}}{l}x \tag{4.3.5a}$$

$$W_n(x)=x(x-l)x^{n-1},\quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.5b}$$

とすればよい。

(4.3.3)式を(4.3.1a)式に代入すると

$$I(a_1, a_2, \cdots, a_N) = I[w]_{(4.3.3)} = \min \tag{4.3.6}$$

となる。したがって，停留条件は

$$0 = \frac{\partial I(a_1, a_2, \cdots, a_N)}{\partial a_n} = \frac{\partial I[w]_{(4.3.3)}}{\partial a_n}$$

$$= \int_0^l EI \, \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 W_n}{dx^2} dx$$

$$- \int_0^l f W_n \, dx - \overline{M_x(0)} W_n'(0) + \overline{M_x(l)} W_n'(l), \quad (n = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.3.7}$$

で与えられる。この式は書き直すと， $a_1, a_2, \cdots, a_N$ に関する連立一次方程式

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\int_0^l EI \, \frac{d^2 W_m}{dx^2} \frac{d^2 W_n}{dx^2} dx \right) a_n = - \int_0^l EI \, \frac{d^2 W_m}{dx^2} \frac{d^2 W_0}{dx^2} dx$$

$$+ \int_0^l f W_m \, dx + \overline{M_x(0)} W_m'(0) - \overline{M_x(l)} W_m'(l), \quad (m = 1, 2, \cdots, N) \tag{4.3.8}$$

となる。(4.3.7)式すなわち(4.3.8)式を解くのが Ritz 法である。

$W_n(x)$ が 4 回連続微分可能な関数と仮定して，(4.3.7)式を部分積分により変形すると

$$0 = - \int_0^l \frac{d}{dx} \left(EI \, \frac{d^2 w}{dx^2} \right) \frac{dW_n}{dx} dx$$

$$- \int_0^l f W_n \, dx - \left(EIw''(0) + \overline{M_x(0)} \right) W_n'(0) + \left(EIw''(l) + \overline{M_x(l)} \right) W_n'(l)$$

$$= \int_0^l \left[\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \, \frac{d^2 w}{dx^2} \right) - f \right] W_n \, dx$$

$$- \left(EIw''(0) + \overline{M_x(0)} \right) W_n'(0) + \left(EIw''(l) + \overline{M_x(l)} \right) W_n'(l)$$

$$for \;\; n = 1, 2, \cdots, N \tag{4.3.9}$$

となる。

もしも，(4.3.3)式で与えられる $w(x)$ が自然条件の 1 部である(4.3.2b)式も満足していると，すなわち

$$EIW_0''(0) = -\overline{M_x(0)}, \quad EIW_0''(l) = -\overline{M_x(l)} \tag{4.3.10a}$$

$$EIW_n''(0)=0,\quad EIW_n''(l)=0,\qquad (n=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.10b}$$

であるとする。例えば

$$W_0(x)=\left[-\left(\frac{\overline{M_x(0)}}{6EIl^2}+\frac{\overline{w(0)}}{l^4}\right)x-\frac{\overline{w(0)}}{l^3}\right](x-l)^3$$
$$+\left[-\left(\frac{\overline{M_x(l)}}{6EIl^2}+\frac{\overline{w(l)}}{l^4}\right)x+\left(\frac{\overline{M_x(l)}}{6EIl}+2\frac{\overline{w(l)}}{l^3}\right)\right]x^3 \tag{4.3.11a}$$

$$W_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.11b}$$

とすればよい。このとき，(4.3.9)式より

$$\int_0^l\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2w}{dx^2}\right)-f\right]W_n\,dx=0,\quad (n=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.12}$$

が求まる。書き直すと，$a_1, a_2, \cdots, a_N$ に関する連立一次方程式

$$\sum_{n=1}^{N}\left\{\int_0^l W_m\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_n}{dx^2}\right)\right]dx\right\}a_n$$
$$=-\int_0^l W_m\left[\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\,\frac{d^2W_0}{dx^2}\right)-f\right]dx,\quad (m=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.13}$$

を得る。(4.3.12)式すなわち(4.3.13)式を解くのが Galerkin 法である。

境界条件はすべて満足させて，微分方程式だけを(4.3.12)式のように弱く，別の言い方をすれば，平均的に満足させるのが Galerkin 法である。

$EI=const$ で $\overline{w(0)}, \overline{w(l)}, \overline{M_x(0)}, \overline{M_x(l)}$ がすべて零のとき，すなわち単純支持の場合には，$a_1, a_2, \cdots, a_N$ を未知定数として，$w(x)$ を

$$w(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\quad 0\le x\le l \tag{4.3.14}$$

と展開してみる。この式を(4.3.13)式に代入すると

$$\frac{EIl}{2}\left(\frac{m\pi}{l}\right)^4 a_m=\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx,\quad (m=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.15}$$

となる。これを a_m について解くと

$$a_m=\frac{2}{EIl}\left(\frac{l}{m\pi}\right)^4\int_0^l f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)dx,\quad (m=1,2,\cdots,N) \tag{4.3.16}$$

となるが，これは正解に外ならない。