

§ 4.2 Ritz の方法

[例 4.2.1] 最も簡単な例として、両端を単純支持された長さ l の棒の曲げを考える(§ 3.2)。 $x = c$ で集中荷重 P が作用しているものとする、棒のたわみ $w(x)$ は汎関数が(3.2.11a)式、境界条件が(3.2.17)式で与えられる変分問題

$$I[w] = \frac{EI}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - Pw(c) = \min \quad (4.2.1a)$$

under

$$w(0) = 0, \quad w(l) = 0 \quad (4.2.1b)$$

の解である。

棒のたわみ $w(x)$ を

$$w(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2.2)$$

で近似する。ここで、 a_1, a_2, \dots, a_N は未知定数である。 $w(x)$ は境界条件(4.2.1b)式を満足している。さらに、棒の両端でモーメントが零の条件(3.2.19)式をも満足しているが、この条件は自然条件であるから、最初から満足しておく必要はない。(4.2.2)式を(4.2.1a)式に代入すると

$$I = I(a_1, a_2, \dots, a_N) = \frac{\pi^4 EI}{4l^3} \sum_{n=1}^N n^4 a_n^2 - P \sum_{n=1}^N a_n \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right) = \min \quad (4.2.3)$$

を得る。変分問題が多変数関数の最小値問題に変換された。したがって、停留条件は

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a_n} = \frac{\pi^4 EI}{2l^3} n^4 a_n - P \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.4)$$

となる。故に

$$a_n = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI n^4} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right), \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (4.2.5)$$

となるので

$$w(x) = \frac{2Pl^3}{\pi^4 EI} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^4} \sin\left(\frac{n\pi c}{l}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2.6)$$

を得る。(4.2.2)式の表現は w を表現するための十分な自由度を有する上に、すなわち完全系である上に、(4.2.6)式の w は、 $N \rightarrow \infty$ のとき収束するので、正しい近似解が得られたと考えられよう。事実、 $N \rightarrow \infty$ とすると(4.2.6)式

の w は正解に外ならない。

(4.2.6)式の結果は, (4.2.2)式を(3.2.13)式で与えられる棒の曲げの方程式に代入して得られる解と同じ結果を与えるので, Ritz 法の説明以上の意味はない。棒の曲げ剛性 EI が x の関数であるような場合には, 独自の意味を有する。

棒のたわみ $w(x)$ の近似関数としては, (4.2.2)式の代わりに

$$w(x) = x(x-l)(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2.7)$$

としてもよい。また, 両端固定の場合には

$$w(x) = x^2(x-l)^2(a_1 + a_2x + a_3x^2 + \dots), \quad 0 \leq x \leq l \quad (4.2.8)$$

とすればよい。

[例 4.2.2] つぎに, § 3.4 で述べた膜の荷重によるたわみについて考えてみよう。膜のたわみ $w(x, y)$ は, (3.4.11)式で与えられる変分問題の解である。すなわち

$$I[w] = \frac{T_0}{2} \iint_R (w_x^2 + w_y^2) dR - \iint_R f w dR = \min \quad (4.2.9a)$$

under

$$w = 0 \quad \text{on } S \quad (4.2.9b)$$

という変分問題の解である。

膜のたわみを, 関数系 $W_n(x, y)$, ($n = 1, 2, \dots, N$) を用いて

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^N a_n W_n(x, y) \quad \text{in } R \quad (4.2.10a)$$

where

$$W_n(x, y) = 0 \quad \text{in } R, \quad (n = 1, 2, \dots, N) \quad (4.2.10b)$$

と近似しよう。(4.2.10a)式を(4.2.9a)式に代入すると

$$\begin{aligned} I &= I(a_1, a_2, \dots, a_N) \\ &= \frac{T_0}{2} \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N a_m a_n \iint_R (W_{mx} W_{nx} + W_{my} W_{ny}) dR - \sum_{m=1}^N a_m \iint_R f W_m dR \\ &= \min \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

という多変数関数の最小値問題になる。停留条件は

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial I}{\partial a_m} = T_0 \sum_{n=1}^N a_n \iint_R (W_{mx} W_{nx} + W_{my} W_{ny}) dR - \iint_R f W_m dR, \\ & \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.2.12)$$

である。(4.2.12)式は, N 個の変数 a_1, a_2, \dots, a_N に関する連立 1 次方程式であるので, 計算機を使えば容易に解を求めることができる。

膜 R が矩形 ($0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$) のときには

$$w(x, y) = a_1 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_2 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_3 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots$$

in R (4.2.13)

あるいは

$$w(x, y) = xy(x-a)(y-b)(a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots)$$

in R (4.2.14)

とすることが考えられる。(4.2.13)式あるいは(4.2.14)式で与えられる w は, 境界条件(4.2.9b)式を満足するように選ばれたものである。

荷重 $f(x, y) = f_0 = \text{const}$ の場合, $N = 1$ として

$$w(x, y) = a_1 W_1(x, y) \quad (4.2.15a)$$

where

$$W_1(x, y) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.2.15b)$$

とすると, (4.2.11)式より

$$\begin{aligned} I &= I(a_1) = \frac{T_0}{2} a_1^2 \int_0^a \int_0^b (W_{1x}^2 + W_{1y}^2) dx dy - f_0 a_1 \int_0^a \int_0^b W_1 dx dy \\ &= \frac{T_0}{2} a_1^2 \int_0^a \int_0^b \left(\frac{\pi^2}{a^2} \cos^2 \frac{\pi x}{a} \sin^2 \frac{\pi y}{b} + \frac{\pi^2}{b^2} \sin^2 \frac{\pi x}{a} \cos^2 \frac{\pi y}{b} \right) dx dy \\ &\quad - f_0 a_1 \int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy \\ &= \frac{T_0 \pi^2}{2} \frac{(a^2 + b^2)}{4ab} a_1^2 - \frac{4ab}{\pi^2} f_0 a_1 = \min \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

となる。したがって, (4.2.12)式の停留条件は

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a_1} = T_0 \pi^2 \frac{(a^2 + b^2)}{4ab} a_1 - \frac{4ab}{\pi^2} f_0 \quad (4.2.17)$$

となるので

$$a_1 = \frac{f_0}{\pi^4 T_0} \frac{16a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.18)$$

を得る。(4.2.15a)式に代入すれば

$$w(x, y) = \frac{f_0}{\pi^4 T_0} \frac{16a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (4.2.19)$$

が求まる。

(4.2.19)式の結果は，(3.4.13)式で与えられる膜のたわみの方程式に，(4.2.13)式を代入して得られる正解の第1項であるので，Ritz法の説明以上の意味はあまりない。膜の張力 T_0 が x, y の関数であるような場合には，独自の意味を有するが，膜の問題としては不自然である。

(4.2.15)式の代わりに

$$w(x, y) = a_1 W_1(x, y) \quad (4.2.20a)$$

where

$$W_1(x, y) = xy(x-a)(y-b) \quad (4.2.20b)$$

とすると，(4.2.11)式より

$$\begin{aligned} I &= I(a_1) = \frac{T_0}{2} a_1^2 \int_0^a \int_0^b (W_{1x}^2 + W_{1y}^2) dx dy - f_0 a_1 \int_0^a \int_0^b W_1 dx dy \\ &= \frac{T_0}{2} a_1^2 \int_0^a \int_0^b [(2x-a)^2 y^2 (y-b)^2 + x^2 (x-a)^2 (2y-b)^2] dx dy \\ &\quad - f_0 a_1 \int_0^a \int_0^b (x^2 - ax)(y^2 - by) dx dy \\ &= \frac{T_0}{180} a^3 b^3 (a^2 + b^2) a_1^2 - \frac{f_0}{36} a^3 b^3 a_1 = \min \end{aligned} \quad (4.2.21)$$

となる。したがって，(4.2.12)式の停留条件は

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a_1} = \frac{T_0}{90} a^3 b^3 (a^2 + b^2) a_1 - \frac{f_0}{36} a^3 b^3 \quad (4.2.22)$$

となるので

$$a_1 = \frac{5 f_0}{2 T_0} \frac{1}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.23)$$

を得る。(4.2.20a)式に代入すれば

$$w(x, y) = \frac{5 f_0}{2 T_0} \frac{1}{(a^2 + b^2)} xy(x-a)(y-b) \quad (4.2.24)$$

が求まる。

(4.2.24)式より

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)_{(4.2.24)} = \frac{5}{32} \frac{f_0}{T_0} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} = 0.156 \frac{f_0}{T_0} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.25a)$$

を得る。一方, (4.2.19)式より

$$w\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)_{(4.2.19)} = \frac{16}{\pi^4} \frac{f_0}{T_0} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} = 0.164 \frac{f_0}{T_0} \frac{a^2 b^2}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.25b)$$

が求まり, w を(4.2.20)式で近似しても(4.2.15)式で近似してもほぼ同様の結果が得られた。

ポテンシャル・エネルギー最小の原理とコンプレメンタリ・エネルギー最小の原理により, 膜のひずみエネルギーを評価してみよう。そのために, 膜のたわみの問題に関するこの二つの変分原理を導く。ポテンシャル・エネルギー最小の原理は既に導かれているが, 改めて導くことにする。そこで, 膜のたわみに関する境界値問題をつぎのように書く。新たに, 変数 $p(x, y)$ と $q(x, y)$ を導入するが, pdy および qdx は, 膜要素 $dxdy$ の辺 dx および dy に作用する z 方向の力である。

力学的条件 $[M]$:

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + f = 0 \quad \text{in } R \quad (4.2.26)$$

運動学的条件 $[K]$:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \eta &= \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \quad \text{in } R \quad (4.2.27a)$$

$$w = 0 \quad \text{on } S \quad (4.2.27b)$$

フリッツ条件 $[B_{p\xi}]$:

$$\begin{aligned} p &= T_0 \xi, \\ q &= T_0 \eta \end{aligned} \quad (4.2.28a)$$

または $[B_{\xi p}]$

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{T_0} p, \\ \eta &= \frac{1}{T_0} q \end{aligned} \quad (4.2.28b)$$

運動学的条件 $[K]$ を満足するという条件の下で, 仮想変位変分 δw を考えると

$$\begin{aligned}
0 &= -\iint_R \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} + f \right) \delta w dR \\
&= \iint_R \left(p \frac{\partial \delta w}{\partial x} + q \frac{\partial \delta w}{\partial y} \right) dR - \iint_R f \delta w dR \\
&\quad - \int_S (pn_x + qn_y) \delta w dS \\
&= \iint_R (p \delta \xi + q \delta \eta) dR - \iint_R f \delta w dR \\
&= \delta \left[\frac{T_0}{2} \iint_R (\xi^2 + \eta^2) dR - \iint_R f w dR \right]
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

を得る。したがって、ポテンシャル・エネルギー最小の原理

$$\begin{aligned}
I[w, p, q] &= \frac{T_0}{2} \iint_R (\xi^2 + \eta^2) dR - \iint_R f w dR = \min \\
&\text{under } [K] \text{ \& } [B_{p\xi}]
\end{aligned} \tag{4.2.30}$$

が求まる。この変分原理の自然条件は、言うまでもなく $[M]$ である。この変分原理は、(4.2.9)式の変分問題に外ならない。

一方、力学的条件 $[M]$ を満足するという条件の下で、仮想力変分 δp , δq を考えると

$$\begin{aligned}
0 &= -\iint_R \left[\left(\xi - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \delta p + \left(\eta - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \delta q \right] dR \\
&\quad - \int_S w (\delta p n_x + \delta q n_y) dS \\
&= -\iint_R (\xi \delta p + \eta \delta q) dR - \iint_R w \left(\frac{\partial \delta p}{\partial x} + \frac{\partial \delta q}{\partial y} \right) dR \\
&= \delta \left[-\frac{1}{2T_0} \iint_R (p^2 + q^2) dR \right]
\end{aligned} \tag{4.2.31}$$

を得る。したがって、コンプレメンタリ・エネルギー最小の原理

$$\begin{aligned}
K[p, q] &= -\frac{1}{2T_0} \iint_R (p^2 + q^2) dR = \max \\
&\text{under } [M] \text{ \& } [B_{\xi p}]
\end{aligned} \tag{4.2.32}$$

が求まる。この変分原理の自然条件は、言うまでもなく $[K]$ である。(4.2.32) 式の変分原理は最大原理であるが、コンプレメンタリ・エネルギー $-K$ に関しては最小原理なので、このように呼ぶ。

今、 $\bar{w}, \bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{p}, \bar{q}$ を境界値問題(4.2.26) ~ (4.2.28)式の正解とすると

$$\begin{aligned}
 I[\bar{w}, \bar{\xi}, \bar{\eta}] &= \frac{T_0}{2} \iint_R (\bar{\xi}^2 + \bar{\eta}^2) dR - \iint_R f \bar{w} dR \\
 &= \frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR + \iint_R \left(\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{q}}{\partial y} \right) \bar{w} dR \\
 &= \frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR - \iint_R \left(\bar{p} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{q} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) dR \\
 &= -\frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR \\
 &= K[\bar{p}, \bar{q}]
 \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

となる。したがって、ポテンシャル・エネルギー最小の原理(4.2.30)式の近似解を $\tilde{w}_p, \tilde{\xi}_p, \tilde{\eta}_p$ とし、コンプレメンタリ・エネルギー最小の原理(4.2.32)式の近似解を \tilde{p}_c, \tilde{q}_c とすると、(4.2.30)式が最小原理であり(4.2.32)式が最大原理であることと、(4.2.33)式より

$$K[\tilde{p}_c, \tilde{q}_c] \leq -\frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR \leq I[\tilde{w}_p, \tilde{\xi}_p, \tilde{\eta}_p] \tag{4.2.34}$$

が成立するので、これを用いて膜のひずみエネルギーの評価をすることができる。

荷重 $f(x, y) = f_0 = \text{const}$ のとき、 \tilde{w}_p として(4.2.24)式を取ると、(4.2.21)式と(4.2.23)式より

$$I[\tilde{w}_p, \tilde{p}_p, \tilde{q}_p] = -\frac{5}{144} \frac{f_0^2}{T_0} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \tag{4.2.35}$$

が求まる。

一方、 $\psi(x, y)$ を R における任意の関数として

$$\begin{aligned}
 p &= -\frac{f_0}{2} x + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\
 q &= -\frac{f_0}{2} y - \frac{\partial \psi}{\partial x}
 \end{aligned} \quad \text{in } R \tag{4.2.36}$$

とすると、 $[M]$ を満足できるので、これを(4.2.32)式に代入すると

$$\begin{aligned}
K[\psi] &= K[p, q]_{(4.2.35)} \\
&= -\frac{1}{2T_0} \iint_R \left[\left(-\frac{f_0}{2}x + \frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + \left(-\frac{f_0}{2}y - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 \right] dR \\
&= -\frac{1}{2T_0} \iint_R \left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y} \right)^2 + f_0 y \frac{\partial\psi}{\partial x} - f_0 x \frac{\partial\psi}{\partial y} \right] dR \\
&\quad - \frac{f_0^2}{24T_0} ab(a^2 + b^2) \tag{4.2.37}
\end{aligned}$$

が求まる。そこで，この変分原理の近似解 $\tilde{\psi}_C$ を， b_1, b_2, b_3 を未知定数として

$$\tilde{\psi}_C = b_1 + b_2 x + b_3 y \quad \text{in } R \tag{4.2.38}$$

とすると，(4.2.37)式より

$$\begin{aligned}
K &= K(b_2, b_3) \\
&= -\frac{1}{2T_0} \int_0^a \int_0^b (b_2^2 + b_3^2 + f_0 b_2 y - f_0 b_3 x) dx dy - \frac{f_0^2}{24T_0} ab(a^2 + b^2) \\
&= -\frac{1}{2T_0} ab(b_2^2 + b_3^2) - \frac{f_0}{4T_0} ab^2 b_2 + \frac{f_0}{4T_0} a^2 b b_3 - \frac{f_0^2}{24T_0} ab(a^2 + b^2) \tag{4.2.39}
\end{aligned}$$

であるので，停留条件は

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial K}{\partial b_2} = -\frac{1}{T_0} ab b_2 - \frac{f_0}{4T_0} ab^2, \\
0 &= \frac{\partial K}{\partial b_3} = -\frac{1}{T_0} ab b_3 + \frac{f_0}{4T_0} a^2 b \tag{4.2.40}
\end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned}
b_2 &= -\frac{f_0}{4} b, \\
b_3 &= \frac{f_0}{4} a \tag{4.2.41}
\end{aligned}$$

を得る。これを，(4.2.39)式に代入すると

$$K[\tilde{p}_C, \tilde{q}_C] = K[\tilde{\psi}] = -\frac{1}{96} \frac{f_0^2}{T_0} ab(a^2 + b^2) \tag{4.2.42}$$

となる。

(4.2.35)式と(4.2.42)式を(4.2.34)式に代入すると

$$-\frac{1}{96} \frac{f_0^2}{T_0} ab(a^2 + b^2) \leq -\frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR \leq -\frac{5}{144} \frac{f_0^2}{T_0} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad (4.2.43)$$

を得る。 $a = b$ とすると

$$-\frac{1}{48} \frac{f_0^2}{T_0} a^4 \leq -\frac{1}{2T_0} \iint_R (\bar{p}^2 + \bar{q}^2) dR \leq -\frac{5}{288} \frac{f_0^2}{T_0} a^4 \quad (4.2.44)$$

となるので，一応の精度の解が得られたと言ってよいであろう。

膜 R の形が矩形でなくて，より一般的に

$$g(x, y) = 0 \quad (4.2.45)$$

で与えられる場合には，(4.2.14)式の代わりに

$$w(x, y) = g(x, y)(a_1 + a_2 x + a_3 y + a_4 x^2 + a_5 xy + a_6 y^2 + \dots) \quad \text{in } R \quad (4.2.46)$$

とすれば，境界条件(4.2.9b)式を満足することができる。

[例 4.2.3] つぎに，前節(§ 4.1)の最後に述べたサント・ヴェナント(Saint Venant)の捻じり問題を取り上げ，捻じり剛性の上下界について議論したい。座標系その他のは § 4.1 を参照されたい。

捻じり剛性 \hat{J} の上下界は，(4.1.110)式より

$$2K_3[\varphi_a] \leq \hat{J} \leq 2I_3[\psi_a] + \iint_S (x^2 + y^2) dx dy \quad (4.2.47)$$

により評価できる。ここで， ψ_a および φ_a は(4.1.89)式の変分問題

$$I_3[\psi] = \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$-\frac{1}{2} \int_C \psi \left[\frac{\partial}{\partial s} (x^2 + y^2) \right] ds = \min \quad (4.2.48)$$

および(4.1.104)式の変分問題

$$K_3[\varphi] = -\frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

$$+ 2 \iint_S \varphi dx dy = \max \quad (4.2.49a)$$

under

$$\varphi = 0 \quad \text{on } C \quad (4.2.49b)$$

の近似解である。

例として，角柱の捩じりを考える。図 4.2.1 に棒の断面を示す。

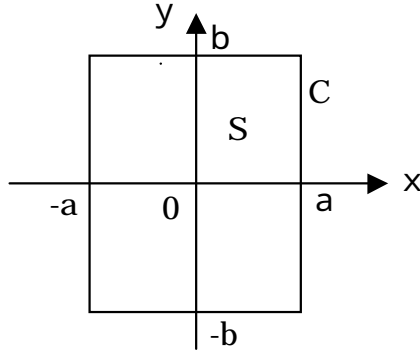


図 4.2.1 角柱の断面

このとき，簡単な計算により

$$\iint_S (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x^2 + y^2) dx dy = \frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) \quad (4.2.50)$$

となる。 $\psi_a = 0$ を仮定すると，この値は \hat{J} の上界を与える。また， B_1 を未知定数として

$$\varphi = B_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad \text{in } S \quad (4.2.51)$$

とすると

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b \left\{ [2B_1 x(y^2 - b^2)]^2 + [2B_1 y(x^2 - a^2)]^2 \right\} dx dy \\ &= \frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) B_1^2 \quad (4.2.52a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \iint_S \varphi dx dy \\ &= \int_{-a}^a \int_{-b}^b B_1 (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{16}{9} a^3 b^3 B_1 \quad (4.2.52b)$$

であるので，これらを(4.2.49a)式に代入すると

$$K_3(B_1) = -\frac{64}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) B_1^2 + \frac{32}{9} a^3 b^3 B_1 = \max \quad (4.2.53)$$

となる。停留条件

$$0 = \frac{\partial K_3}{\partial B_1} = -\frac{128}{45} a^3 b^3 (a^2 + b^2) B_1 + \frac{32}{9} a^3 b^3 \quad (4.2.54)$$

を解くと

$$B_1 = \frac{5}{4} \frac{1}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.55a)$$

$$\varphi_a = \frac{5}{4} \frac{1}{(a^2 + b^2)} (x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad \text{in } S \quad (4.2.55b)$$

であるので

$$K_3[\varphi_a] = \frac{20}{9} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.56)$$

となる。(4.2.50)式と(4.2.56)式を(4.2.47)式に代入すると

$$\frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \leq \hat{J} \leq \frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) \quad (4.2.57)$$

が求まる。代数平均は幾何平均より小でないことを用いると，不等式

$$\frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) = \frac{4}{3} \frac{ab(a^2 + b^2)^2}{(a^2 + b^2)} \geq \frac{16}{3} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.58)$$

が成立する。したがって，(4.2.57)式の最右辺は最左辺より必ず小でない。

さらに， ψ の近似を高めるために， A_1 を未知定数として

$$\psi = A_1 xy \quad \text{in } S \quad (4.2.59)$$

と置くと

$$\begin{aligned} & \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &= A_1^2 \int_{-a}^a \int_{-b}^b (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) A_1^2 \quad (4.2.60a)$$

$$\begin{aligned} & \int_C \psi \left[\frac{\partial}{\partial s} (x^2 + y^2) \right] ds \\ &= \int_{-b}^b A_1 a y (2y) dy + \int_a^{-a} A_1 x b (-2x) (-dx) \\ & \quad + \int_b^{-b} -A_1 a y (-2y) (-dy) + \int_{-a}^a -A_1 x b (2x) dx \\ &= -\frac{8}{3} ab(a^2 - b^2) A_1 \end{aligned} \quad (4.2.60b)$$

となる。これらを(4.2.48)式に代入すると

$$I_3(A_1) = \frac{2}{3} ab(a^2 + b^2) A_1^2 + \frac{4}{3} ab(a^2 - b^2) A_1 = \min \quad (4.2.61)$$

となる。停留条件

$$0 = \frac{\partial I_3}{\partial A_1} = \frac{4}{3} ab(a^2 + b^2) A_1 + \frac{4}{3} ab(a^2 - b^2) \quad (4.2.62)$$

を解くと

$$A_1 = -\frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.63a)$$

$$\psi_a = -\frac{(a^2 - b^2)}{(a^2 + b^2)} xy \quad \text{in } S \quad (4.2.63b)$$

であるので

$$I_3[\psi_a] = -\frac{2}{3} \frac{ab(a^2 - b^2)^2}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.64)$$

となる。(4.2.50)式, (4.2.56)式および(4.2.64)式を(4.2.47)式に代入すると

$$\frac{40}{9} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \leq \hat{J} \leq \frac{16}{3} \frac{a^3 b^3}{(a^2 + b^2)} \quad (4.2.65)$$

が求まる。(4.2.57)式と比較すると, 上界値が小さくなっていることが理解されよう。すなわち, ψ, φ の近似を上げることにより, 上下界の値をいくらでも狭めることが可能である。 τ_{xz} は x 軸に関して反対称, τ_{yz} は y 軸に関して反対称という対称性を考慮すると, ψ, φ に関して

$$\psi = xy(A_1 + A_2 x^2 + A_3 y^2 + \dots) \quad \text{in } S \quad (4.2.66a)$$

$$\varphi = (x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(B_1 + B_2x^2 + B_3y^2 + \dots) \quad \text{in } S \quad (4.2.66b)$$

のような近似が可能であろう。

[例 4.2.4] 最後に，線型弾性学の一般的な問題に対する Ritz 法の適用について述べる。(4.1.18)式により与えられるポテンシャル・エネルギー最小の原理

$$\begin{aligned} I[u, v, w, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}] &= \iiint_{\Omega} A(\varepsilon) dV \\ &\quad - \iiint_{\Omega} (fu + gv + hw) d\Omega - \iint_{S_M} (Xu + Yv + Zw) dS \\ &= \min \\ &\quad \text{under } [K] \text{ and } [P_{\sigma\varepsilon}] \end{aligned} \quad (4.2.67)$$

において，変位 u, v, w を

$$\begin{aligned} u &= U_0 + \sum_{n=1}^N a_n U_n(x, y, z), \\ v &= V_0 + \sum_{n=1}^N b_n V_n(x, y, z), \quad \text{in } \Omega \\ w &= W_0 + \sum_{n=1}^N c_n W_n(x, y, z) \end{aligned} \quad (4.2.68)$$

で近似する。ここで a_n, b_n, c_n は未知定数， U_n, V_n, W_n は既知の関数とし，(4.1.12b)式を満足しているものとする。すなわち

$$\begin{aligned} U_0 &= \xi \\ V_0 &= \eta, \quad \text{in } \Omega \\ W_0 &= \zeta \end{aligned} \quad (4.2.69a)$$

$$\begin{aligned} U_n &= 0 \\ V_n &= 0, \quad \text{in } \Omega \quad (n = 1, 2, \dots, N) \\ W_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.69b)$$

とする。(4.2.68)式を行列表現をすると

$$\{u\} = [u, v, w]^T$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{Bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} U_1 & \cdots & U_N & & & \\ & & & V_1 & \cdots & V_N \\ & & & & & & W_1 & \cdots & W_N \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix} \\
&= \{u_0\} + [U]\{a\} \tag{4.2.70}
\end{aligned}$$

となる。行列 $\{u_0\}$, $[U]$, $\{a\}$ の定義は，自明と思われるので特に断らない。
以下においても，同様とする。歪み $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}$ は，(4.1.12a)式より

$$\begin{aligned}
\{\varepsilon\} &= [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T \\
&= \begin{Bmatrix} \frac{\partial U_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial y} \\ \frac{\partial W_0}{\partial z} \\ \frac{\partial W_0}{\partial y} + \frac{\partial V_0}{\partial z} \\ \frac{\partial U_0}{\partial z} + \frac{\partial W_0}{\partial x} \\ \frac{\partial V_0}{\partial x} + \frac{\partial U_0}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial U_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial U_N}{\partial x} & & & \\ & & & \frac{\partial V_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial V_N}{\partial y} \\ & & & & & & \frac{\partial W_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial W_N}{\partial z} \\ & & & & & & \frac{\partial V_1}{\partial z} & \cdots & \frac{\partial V_N}{\partial z} \\ & & & & & & \frac{\partial W_1}{\partial y} & \cdots & \frac{\partial W_N}{\partial y} \\ & & & & & & \frac{\partial U_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial U_N}{\partial x} \\ & & & & & & \frac{\partial V_1}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial V_N}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_N \\ b_1 \\ \vdots \\ b_N \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{Bmatrix} \\
&= \{\varepsilon_0\} + [B]\{a\} \tag{4.2.71}
\end{aligned}$$

と書ける。歪みエネルギー $A(\varepsilon)$ は，(4.1.16b)式より

$$\begin{aligned}
A(\varepsilon) &= \frac{1}{2} \{\varepsilon\}^T [E] \{\varepsilon\} \\
&= \frac{1}{2} (\{\varepsilon_0\}^T + \{a\}^T [B]^T) [E] (\{\varepsilon_0\} + [B]\{a\}) \tag{4.2.72}
\end{aligned}$$

と表現できる。外力のポテンシャルの項は

$$\begin{aligned}
fu + gv + hw &= \{f\}^T \{u\} \\
&= \{f\}^T (\{u_0\} + [U]\{a\}) = (\{u_0\}^T + \{a\}^T [U]^T) \{f\} \tag{4.2.73a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Xu + Yv + Zw &= \{X\}^T \{u\} \\
&= \{X\}^T (\{u_0\} + [U]\{a\}) = (\{u_0\}^T + \{a\}^T [U]^T) \{X\} \tag{4.2.73b}
\end{aligned}$$

となる。

(4.2.72)式と(4.2.73)式を, (4.2.67)式に代入すると

$$\begin{aligned}
 I &= I(a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N) \\
 &= \frac{1}{2} \{a\}^T \iiint_{\Omega} [B]^T [E][B] dV \{a\} \\
 &\quad + \{a\}^T \iiint_{\Omega} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV - \{a\}^T \iiint_{\Omega} [U]^T \{f\} dV - \{a\}^T \iint_{S_M} [U]^T \{X\} dS \\
 &\quad + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\varepsilon_0]^T [E][\varepsilon_0] dV - \iiint_{\Omega} \{u_0\}^T \{f\} dV - \iint_{S_M} \{u_0\}^T \{X\} dS \\
 &= \min \tag{4.2.74}
 \end{aligned}$$

となる。停留条件を求めると

$$\begin{aligned}
 0 &= \delta I \\
 &= \frac{1}{2} \{\delta a\}^T \iiint_{\Omega} [B]^T [E][B] dV \{a\} + \frac{1}{2} \{a\}^T \iiint_{\Omega} [B]^T [E][B] dV \{\delta a\} \\
 &\quad + \{\delta a\}^T \iiint_{\Omega} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV - \{\delta a\}^T \iiint_{\Omega} [U]^T \{f\} dV - \{\delta a\}^T \iint_{S_M} [U]^T \{X\} dS \\
 &= \{\delta a\}^T \left[\begin{aligned} &\iiint_{\Omega} [B]^T [E][B] dV \{a\} + \iiint_{\Omega} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV \\ &\quad - \iiint_{\Omega} [U]^T \{f\} dV - \iint_{S_M} [U]^T \{X\} dS \end{aligned} \right] \tag{4.2.75}
 \end{aligned}$$

を得る。これより, $3N$ 個の未知数 $\{a\}^T = [a_1, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N, c_1, \dots, c_N]$ に関する連立一次方程式

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega} [B]^T [E][B] dV \{a\} \\
 &= -\iiint_{\Omega} [B]^T [E] \{\varepsilon_0\} dV + \iiint_{\Omega} [U]^T \{f\} dV + \iint_{S_M} [U]^T \{X\} dS \tag{4.2.76}
 \end{aligned}$$

が得られたので, これを解けばよい。