§4. 変分問題の直接解法

変分法の大きな特長は，境界値問題の数値解を求めるのに，極めて有効に使えるということである。いわゆる変分法の直接解法である。境界値問題の解法としては，差分法のように各点毎に微分方程式を満足する強解(strong solution)を求める方法ではなくて，領域全体で平均的に満足する弱解(weak solution)を求める方法である。§4.1 では境界値問題を変分問題に置き換える一般的な方法について述べる。§4.2 では，直接解法の起源であるﾘｯﾂ法(Ritz Method)について述べる。§4.3 では，思想的には異なるが弱解法の一つであるｶﾞﾗｰｷﾝ法(Galerkin Method)について述べる。§4.4 では，近年各方面で大いに威力を発揮している有限要素法について述べる。

§4.1　境界値問題の変分問題への変換

[例 4.1.1]　まず一番基本的な非粘性非圧縮流体の非回転運動について述べる。§3.6 では，変分問題(3.6.34)式から境界値問題(3.6.35)式を導いた。ここでは，逆のことを考えてみる。すなわち，流体の存在する領域をΩ，Ωの境界をS，ϕを速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ，fを既知の関数として，境界値問題

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \quad in\ \Omega \tag{4.1.1a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=f \quad on\ S \tag{4.1.1b}$$

から変分問題

$$K[\phi]=-\frac{1}{2}\iiint_\Omega\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dV+\iint_S\phi\, f\,dS$$

$$=\max \tag{4.1.2}$$

を導いてみよう(Dirichlet の原理)。ここで，流体の密度を 1，$dV=dxdydz$ とする。

(4.1.1a)式より

$$
\begin{aligned}
0 &= \iiint_\Omega \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \right) \delta\phi dV \\
&= \iiint_\Omega \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\ \delta\phi \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\ \delta\phi \right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\ \delta\phi \right) \right] dV \\
&\quad - \iiint_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z} \right) dV \\
&= \iint_S \frac{\partial\phi}{\partial n}\delta\phi dS - \delta\left[\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \right) dV \right] \qquad (4.1.3)
\end{aligned}
$$

を得る。(4.1.1b)式を(4.1.3)式に代入すると

$$
0 = \delta\left[\iint_S f\phi dS - \frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \right) dV \right] \qquad (4.1.4)
$$

が求まる。すなわち，(4.1.2)式で与えられる変分原理が得られた。

簡単な場合には，上で述べたような方法で境界値問題を変分問題に変換できる。しかし，複雑な場合には，以下に述べるような方法による方が見通しがよい。

流体運動の速度を$\bar{u} = (u, v, w)$とすると，流体の運動は以下の(4.1.5)式と(4.1.6)式で記述される。

力学的条件$[M]$：

$$
u = \frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad in\ \Omega \qquad (4.1.5)
$$

運動学的条件$[K]$：

$$
\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad in\ \Omega \qquad (4.1.6a)
$$

$$
un_x + vn_y + wn_z = f \quad on\ S \qquad (4.1.6b)
$$

運動学的条件$[K]$を満足する速度変分δu, δv, δwを考えると，力学的条件$[M]$より

$$
\begin{aligned}
0 &= \iiint_\Omega \left[\left(u - \frac{\partial\phi}{\partial x} \right)\delta u + \left(v - \frac{\partial\phi}{\partial y} \right)\delta v + \left(w - \frac{\partial\phi}{\partial z} \right)\delta w \right] dV \\
&= \iiint_\Omega (u\delta u + v\delta v + w\delta w) dV
\end{aligned}
$$

$$-\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi\,\delta u}{\partial x}+\frac{\partial\phi\,\delta v}{\partial y}+\frac{\partial\phi\,\delta w}{\partial z}\right)-\phi\left(\frac{\partial\delta u}{\partial x}+\frac{\partial\delta v}{\partial y}+\frac{\partial\delta w}{\partial z}\right)\right]dV$$

$$=\delta\left[\frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2+v^2+w^2)dV\right]$$

$$-\iint_S \phi(\delta u n_x+\delta v n_y+\delta w n_z)dS$$

$$=\delta\left[\frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2+v^2+w^2)\,dV\right] \qquad (4.1.7)$$

を得る。すなわち，力学的条件$[M]$が，汎関数の停留条件で置き換えられることが示された。(4.1.7)式によれば，(4.1.5)式と(4.1.6)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$I[u,v,w]=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2+v^2+w^2)dV=\min$$

$$under \quad [K]$$

$$(4.1.8)$$

と等しい。この変分問題は，§3.6 で述べた Kelvin の原理(3.6.29)式に外ならない。この変分問題の自然条件は，力学的条件$[M]$であることは言うまでもない。

上と逆のことを考えてみよう。すなわち，力学的条件$[M]$を満足する速度変分$\delta u, \delta v, \delta w$，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ変分$\delta\phi$を考えると，運動学的条件$[K]$より

$$0=\iiint_\Omega \delta\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dV$$

$$-\iint_S \delta\phi(un_x+vn_y+wn_z-f)dS$$

$$=\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\delta\phi u}{\partial x}+\frac{\partial\delta\phi v}{\partial y}+\frac{\partial\delta\phi w}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}u+\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}v+\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}w\right)\right]dV$$

$$-\iint_S \delta\phi(un_x+vn_y+wn_z-f)dS$$

$$=-\iiint_\Omega (u\delta u+v\delta v+w\delta w)dV$$

$$+\iint_S \delta\phi\, f\, dS$$

$$= \delta\left[-\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(u^2+u^2+u^2\right)dV + \iint_S f\phi dS\right] \tag{4.1.9}$$

を得る。すなわち，運動学的条件$[K]$が，汎関数の停留条件で置き換えられることが示された。(4.1.9)式によれば，(4.1.5)式と(4.1.6)式で与えられる境界値問題は，変分問題

$$K[u,v,w] = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left(u^2+u^2+u^2\right)dV + \iint_S f\phi dS = \max$$
$$under \quad [M]$$
$$\tag{4.1.10}$$

と等しい。この変分問題は，§3.6 で述べた Dirichlet の原理(3.6.34)式に外ならない。すなわち，(4.1.2)式の変分問題である。この変分問題の自然条件は(3.6.35)式で与えられ，運動学的条件$[K]$であることは言うまでもない。§3.6 で述べたように，(4.1.2)式あるいは(4.1.10)式の変分問題は，変数変換により(4.1.8)式の変分問題より導くことが出来る。その逆も可能である。変数変換については，§6 で詳しく述べる。

[例 4.1.2]　つぎに，線型弾性学の場合について考えてみよう。図 4.1.1 に示されるように，座標を$O(x,y,z)$とする 3 次元閉領域Ωに弾性体が存在するものとし，その境界Sは，力学的条件が与えられる力学的境界S_Mと運動学的条件が与えられる運動学的境界S_Kよりなるものとする。

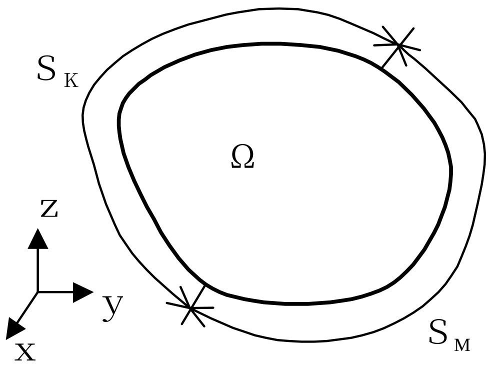

図 4.1.1　弾性体

ﾔﾝｸﾞ率E，ﾎﾟｱｿﾝ比ν，剪断剛性$G = E/[2(1+\nu)]$の弾性体Ωの各点の変位を $\vec{u} = (u,v,w)$ とする。直応力を $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$，剪断応力を $\tau_{xy}=\tau_{yx}, \tau_{yz}=\tau_{zy}, \tau_{zx}=\tau_{xz}$ とし，直歪みを $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$，剪断歪みを

$\varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx},\ \varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy},\ \varepsilon_{zx}=\varepsilon_{xz}$とする。また，弾性体$\Omega$の単位体積あたりに作用する外力を$\vec{f}=(f,\ g,\ h)$，力学的境界$S_M$の単位面積あたりに作用する外力を$\vec{X}=(X,\ Y,\ Z)$とし，運動学的境界$S_K$で与えられる変位を$\vec{\xi}=(\xi,\ \eta,\ \varsigma)$とする。このとき，弾性体の支配方程式は，以下の(4.1.11~13)式により与えられる。

力学的条件$[M]$：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f=0\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+g=0 \qquad in\ \Omega\\
&\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+h=0
\end{aligned}
\right.
\tag{4.1.11a}
$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z=X\\
&\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z=Y \qquad on\ S_M\\
&\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z=Z
\end{aligned}
\right.
\tag{4.1.11b}
$$

運動学的条件$[K]$：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\\
&\gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z},\quad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}
\end{aligned}
\right\} \quad in\ \Omega
\tag{4.1.12a}
$$

$$
u=\xi,\quad v=\eta,\quad w=\varsigma \quad on\ S_K
\tag{4.1.12b}
$$

物性学的条件$[P_{\sigma\varepsilon}]$：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\sigma_x=2G\left[\varepsilon_x+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right],\quad \tau_{yz}=G\gamma_{yz}\\
&\sigma_y=2G\left[\varepsilon_y+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right],\quad \tau_{zx}=G\gamma_{zx}\\
&\sigma_z=2G\left[\varepsilon_z+\frac{\nu}{1-2\nu}(\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z)\right],\quad \tau_{xy}=G\gamma_{xy}
\end{aligned}
\right.
\tag{4.1.13a}
$$

または$[P_{\varepsilon\sigma}]$：

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G}\tau_{yz} \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu(\sigma_z + \sigma_x)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G}\tau_{zx} \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G}\gamma_{yz}
\end{aligned}
\tag{4.1.13b}
$$

運動学的条件[K]を満足する変位変分δu, δv, δw(仮想変位ともいう)を考えると，力学的条件[M]より

$$
0 = -\iiint_\Omega \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f\right)\delta u \\ + \left(\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + g\right)\delta v \\ + \left(\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + h\right)\delta w \end{bmatrix} dV
$$

$$
+ \iint_{S_M} \begin{bmatrix} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z - X)\delta u \\ + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z - Y)\delta v \\ + (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z - Z)\delta w \end{bmatrix} dS
$$

$$
= -\iiint_\Omega \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_x \delta u}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{xy} \delta u}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx} \delta u}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tau_{xy} \delta v}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y \delta v}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{yz} \delta v}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tau_{zx} \delta w}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz} \delta w}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z \delta w}{\partial z} \\ -\sigma_x \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} - \tau_{xy} \dfrac{\partial \delta u}{\partial y} - \tau_{zx} \dfrac{\partial \delta u}{\partial z} \\ -\tau_{xy} \dfrac{\partial \delta v}{\partial x} - \sigma_y \dfrac{\partial \delta v}{\partial y} - \tau_{yz} \dfrac{\partial \delta v}{\partial z} \\ -\tau_{zx} \dfrac{\partial \delta w}{\partial x} - \tau_{yz} \dfrac{\partial \delta w}{\partial y} - \sigma_z \dfrac{\partial \delta w}{\partial z} \end{pmatrix} dV
$$

$$
+ \iint_{S_M} \begin{bmatrix} (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z)\delta u \\ + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z)\delta v \\ + (\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z)\delta w \end{bmatrix} dS
$$

$$- \iiint_\Omega (f\delta u + g\delta v + h\delta w)d\Omega$$

$$- \iint_{S_M} (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dS$$

$$= \iiint_\Omega \begin{pmatrix} \sigma_x \dfrac{\partial \delta u}{\partial x} + \sigma_y \dfrac{\partial \delta v}{\partial y} + \sigma_z \dfrac{\partial \delta w}{\partial z} \\ + \tau_{yz}\left(\dfrac{\partial \delta w}{\partial y} + \dfrac{\partial \delta v}{\partial z}\right) + \tau_{zx}\left(\dfrac{\partial \delta u}{\partial z} + \dfrac{\partial \delta w}{\partial x}\right) + \tau_{xy}\left(\dfrac{\partial \delta v}{\partial x} + \dfrac{\partial \delta u}{\partial y}\right) \end{pmatrix} dV$$

$$- \iiint_\Omega (f\delta u + g\delta v + h\delta w)d\Omega - \iint_{S_M} (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dS$$

$$= \iiint_\Omega \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}\right) dV$$

$$- \iiint_\Omega (f\delta u + g\delta v + h\delta w)d\Omega - \iint_{S_M} (X\delta u + Y\delta v + Z\delta w)dS \qquad (4.1.14)$$

を得る。 (4.1.14)式の最右辺の第 1 項は内力による仮想仕事の総和を，第 2,3 項は外力による仮想仕事の総和を表す。したがって，(4.1.14)式によれば，内力による仮想仕事の総和は，外力による仮想仕事の総和に等しい。これは，仮想仕事の原理(principle of virtual work)と呼ばれる。

物性学的条件$[P_{\sigma\varepsilon}]$は

$$\{\sigma\} = [E]\{\varepsilon\} \qquad (4.1.15a)$$

where

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}]^T \qquad (4.1.15b)$$

$$[E] = G\begin{bmatrix} \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & \dfrac{2\nu}{1-2\nu} & \dfrac{2(1-\nu)}{1-2\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4.1.15c)$$

$$\{\varepsilon\} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}]^T \qquad (4.1.15d)$$

と書ける。ここで，$[E]$は正値対称行列である。したがって

$$\{\sigma\}^T\{\delta\varepsilon\} = \sigma_x\delta\varepsilon_x + \sigma_y\delta\varepsilon_y + \sigma_z\delta\varepsilon_z + \tau_{yz}\delta\gamma_{yz} + \tau_{zx}\delta\gamma_{zx} + \tau_{xy}\delta\gamma_{xy}$$

$$= \{\varepsilon\}^T[E]\{\delta\varepsilon\} = \delta A(\varepsilon) \qquad (4.1.16a)$$

where

$$A(\varepsilon) = \frac{1}{2}\{\varepsilon\}^T[E]\{\varepsilon\} \geq 0 \qquad (4.1.16b)$$

となる。ここで，$A(\varepsilon)$は単位体積当たりの歪みｴﾈﾙｷﾞである。(4.1.16a)式を(4.1.14)式に代入すると

$$0 = \delta\left[\iiint_\Omega A(\varepsilon)dV - \iiint_\Omega (fu + gv + hw)dV - \iint_{S_M}(Xu + Yv + Zw)dS\right] \qquad (4.1.17)$$

を得る。したがって，変分問題

$$I[u,v,w,\varepsilon_x,\varepsilon_y,\varepsilon_z,\gamma_{yz},\gamma_{zx},\gamma_{xy}] = \iiint_\Omega A(\varepsilon)dV$$

$$-\iiint_\Omega (fu + gv + hw)d\Omega - \iint_{S_M}(Xu + Yv + Zw)dS$$

$$= \min$$

under $[K]$ *and* $[P_{\sigma\varepsilon}]$

(4.1.18)

が導かれる。この変分問題は，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(principle of minimum potential energy)と呼ばれる。(4.1.18)式で与えられる変分問題の，自然条件は力学的条件$[M]$であることは言うまでもない。

ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は，運動学的条件$[K]$を拘束条件として，力学的条件$[M]$を自然条件とする変分原理である。これとは逆に，力学的条件$[M]$を拘束条件として,運動学的条件$[K]$を自然条件とする変分原理を導いてみよう。

力学的条件$[M]$を満足する仮想的な応力変分$\delta\sigma_x, \delta\sigma_y, \delta\sigma_z, \delta\tau_{yz}, \delta\tau_{zx}, \delta\tau_{xy}$を考えると，運動学的条件$[K]$より

$$0=-\iiint_{\Omega}\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_x-\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x+\left(\varepsilon_y-\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y+\left(\varepsilon_z-\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\sigma_z\\+\left(\gamma_{yz}-\dfrac{\partial w}{\partial y}-\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\delta\tau_{yz}+\left(\gamma_{zx}-\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\tau_{zx}\\+\left(\gamma_{xy}-\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\delta\tau_{xy}\end{bmatrix}dV$$

$$-\iint_{S_K}\begin{bmatrix}(u-\xi)(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z)\\+(v-\eta)(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z)\\+(w-\zeta)(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\varepsilon_z\delta\sigma_z+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy}\right)dV$$

$$+\iiint_{\Omega}\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial u\delta\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial u\delta\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial u\delta\tau_{zx}}{\partial z}\right)\\+\left(\dfrac{\partial v\delta\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial v\delta\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial v\delta\tau_{yz}}{\partial z}\right)\\+\left(\dfrac{\partial w\delta\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial w\delta\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial w\delta\sigma_z}{\partial z}\right)\end{bmatrix}dV$$

$$-\iiint_{\Omega}\begin{bmatrix}u\left(\dfrac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z}\right)\\+v\left(\dfrac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z}\right)\\+w\left(\dfrac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z}\right)\end{bmatrix}dV$$

$$-\iint_{S_K}\begin{bmatrix}(u-\xi)(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z)\\+(v-\eta)(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z)\\+(w-\zeta)(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS$$

$$=-\iiint_{\Omega}\left(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\varepsilon_z\delta\sigma_z+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy}\right)dV$$

$$+\iint_{S_K}\begin{bmatrix}\xi(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z)\\+\eta(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z)\\+\zeta(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS \tag{4.1.19}$$

を得る。 (4.1.19)式の最右辺の第 1 項は内力による仮想ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ仕事の総和を，第 2 項は外力による仮想ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ仕事の総和を表す。したがって，(4.1.19)式によれば，内力による仮想ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ仕事の総和は，外力による仮想ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ仕事の総和に等しい。これは，仮想ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ仕事の原理(principle of virtual complementary work)と呼ばれる。

物性学的条件$[P_{\varepsilon\sigma}]$は

$$\{\varepsilon\}=[C]\{\sigma\} \tag{4.1.20a}$$

where

$$[C]=\begin{bmatrix}\frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0\\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G}\end{bmatrix} \tag{4.1.20b}$$

と書ける。ここで，$[C]$は正値対称行列である。したがって

$$\{\varepsilon\}^T\{\delta\sigma\}=\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\varepsilon_z\delta\sigma_z+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy}$$

$$=\{\sigma\}^T[C]\{\delta\sigma\}=\delta B(\sigma) \tag{4.1.21a}$$

where

$$B(\varepsilon)=\frac{1}{2}\{\sigma\}^T[C]\{\sigma\}\geq 0 \tag{4.1.21b}$$

となる。ここで， $B(\sigma)$ は単位体積当たりのｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ・ｴﾈﾙｷﾞである。(4.1.21a)式を(4.1.19)式に代入すると

$$0=\delta\left[-\iiint_{\Omega}B(\sigma)dV+\iint_{S_K}\begin{bmatrix}\xi(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z)\\+\eta(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)\\+\zeta(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS\right] \tag{4.1.22}$$

を得る。したがって，変分問題

$$K[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}]=-\iiint_{\Omega}B(\sigma)dV$$

$$+\iint_{S_K}\begin{bmatrix}\xi(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z)\\+\eta(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)\\+\zeta(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS$$

$$=\max$$

$$under\ [M]\ and\ [P_{\varepsilon\sigma}]$$

(4.1.23)

が導かれる。汎関数を$-K$とする変分問題は，ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(principle of minimum complementary energy)と呼ばれる。(4.1.23)式で与えられる変分問題の，自然条件は運動学的条件$[K]$であることは言うまでもないが，つぎのように証明される。

(4.1.23)式で与えられる変分問題において，u, v, wを未定乗数として，Lagrange の乗数法により拘束条件$[M]$を緩和すると

$$K^*[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy},u,v,w]=-\iiint_{\Omega}B(\sigma)dV$$

$$+\iint_{S_K}\begin{bmatrix}\xi(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z)\\+\eta(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z)\\+\zeta(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS$$

$$-\iiint_{\Omega}\begin{bmatrix}u\left(\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f\right)\\+v\left(\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+g\right)\\+w\left(\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+h\right)\end{bmatrix}dV$$

$$
+\iint_{S_M}\begin{bmatrix} u(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z-X) \\ +v(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z-Y) \\ +w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z-Z) \end{bmatrix} dS
$$

$$
= stationary
$$

$$
under\ [P_{\varepsilon\sigma}]
$$

(4.1.24)

となる。物性学的条件$[P_{\varepsilon\sigma}]$を仮定して，この変分問題の停留条件を求めると

$$
0=\delta K^*=-\iiint_\Omega(\varepsilon_x\delta\sigma_x+\varepsilon_y\delta\sigma_y+\varepsilon_z\delta\sigma_z+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz}+\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}+\gamma_{xy}\delta\tau_{xy})dV
$$

$$
+\iint_{S_K}\begin{bmatrix} \xi(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z) \\ +\eta(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z) \\ +\zeta(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z) \end{bmatrix} dS
$$

$$
-\iiint_\Omega\begin{bmatrix} u\left(\dfrac{\partial\delta\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial z}\right) \\ +v\left(\dfrac{\partial\delta\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial z}\right) \\ +w\left(\dfrac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\delta\sigma_z}{\partial z}\right) \end{bmatrix} dV
$$

$$
+\iint_{S_M}\begin{bmatrix} u(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z) \\ +v(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z) \\ +w(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z) \end{bmatrix} dS
$$

$$
-\iiint_\Omega\begin{bmatrix} \delta u\left(\dfrac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f\right) \\ +\delta v\left(\dfrac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+g\right) \\ +\delta w\left(\dfrac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\dfrac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial\sigma_z}{\partial z}+h\right) \end{bmatrix} dV
$$

$$
+\iint_{S_M}\begin{bmatrix}\delta u(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z-X)\\ +\delta v(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z-Y)\\ +\delta w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z-Z)\end{bmatrix}dS
$$

$$
=-\iiint_\Omega\begin{bmatrix}\left(\varepsilon_x-\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta\sigma_x+\left(\varepsilon_y-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\delta\sigma_y+\left(\varepsilon_z-\frac{\partial w}{\partial z}\right)\delta\sigma_z\\ +\left(\gamma_{yz}-\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)\delta\tau_{yz}+\left(\gamma_{zx}-\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right)\delta\tau_{zx}\\ +\left(\gamma_{xy}-\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\delta\tau_{xy}\end{bmatrix}dV
$$

$$
-\iint_{S_K}\begin{bmatrix}(u-\xi)(\delta\sigma_x n_x+\delta\tau_{xy}n_y+\delta\tau_{zx}n_z)\\ +(v-\eta)(\delta\tau_{xy}n_x+\delta\sigma_y n_y+\delta\tau_{yz}n_z)\\ +(w-\zeta)(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y+\delta\sigma_z n_z)\end{bmatrix}dS
$$

$$
-\iiint_\Omega\begin{bmatrix}\delta u\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+f\right)\\ +\delta v\left(\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+g\right)\\ +\delta w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+h\right)\end{bmatrix}dV
$$

$$
+\iint_{S_M}\begin{bmatrix}\delta u(\sigma_x n_x+\tau_{xy}n_y+\tau_{zx}n_z-X)\\ +\delta v(\tau_{xy}n_x+\sigma_y n_y+\tau_{yz}n_z-Y)\\ +\delta w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y+\sigma_z n_z-Z)\end{bmatrix}dS \qquad (4.1.25)
$$

となるので，(4.1.23)式の変分問題の自然条件は，(4.1.25)式の最右辺第 1 項と第 2 項より，$[K]$であることが証明された。

(4.1.24)式で与えられる変分問題において，右辺第 3 項の積分を書き直すと

$$
J[u,v,w,\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy}]=K^*[\sigma_x,\sigma_y,\sigma_z,\tau_{yz},\tau_{zx},\tau_{xy},u,v,w]
$$

$$
= \iiint_{\Omega} \begin{bmatrix} \sigma_x \dfrac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \dfrac{\partial v}{\partial y} + \sigma_z \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ + \tau_{yz}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \tau_{yz}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) + \tau_{yz}\left(\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}\right) \\ - B(\sigma) \\ \end{bmatrix} dV
$$

$$
- \iiint_{\Omega} (fu + gv + hw)\, dV - \iint_{S_M} (Xu + Yv + Zw)\, dS
$$

$$
- \iint_{S_K} \begin{bmatrix} (u-\xi)(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y + \tau_{zx} n_z) \\ (v-\eta)(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y + \tau_{yz} n_z) \\ (w-\zeta)(\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_z n_z) \end{bmatrix} dS
$$

$$
= stationary \qquad (4.1.26)
$$

という変分問題を得る。この変分問題は，ﾍﾘﾝｶﾞ-･ﾗｲｽﾅ-の原理(Hellinger-Reisner principle)と呼ばれている。

この変分原理において，$[K]$と$[P_{\sigma\varepsilon}]$を仮定して書き直すと，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(4.1.18)式になる。変分問題の変数変換については，§6 で詳しく述べる。

上では，ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理よりﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理を導いたが，当然ながらこの逆も可能である。線型弾性学における変分原理の関係を図 4.1.2 に示す。

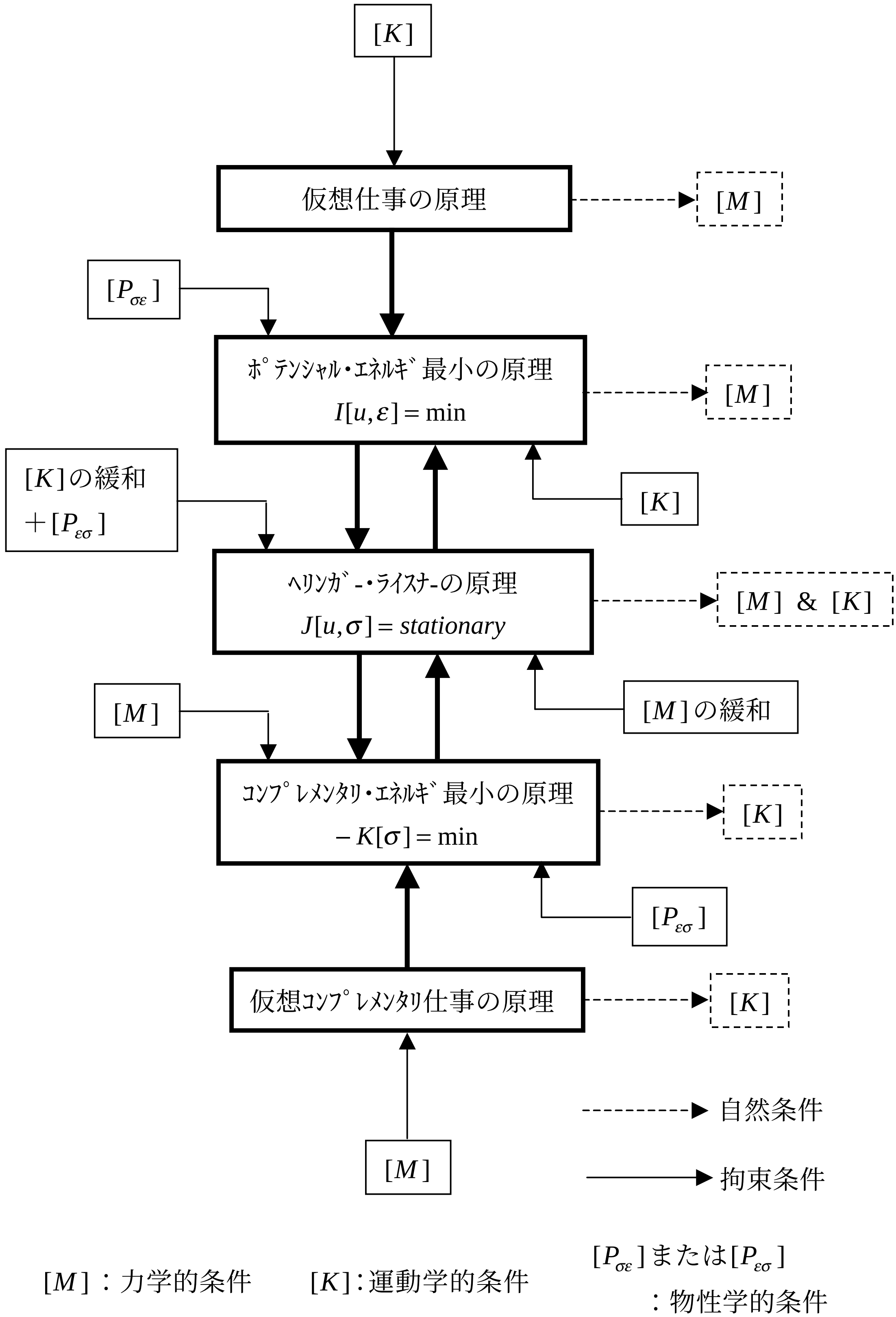

図 4.1.2　線型弾性学における変分原理間の相互関係

[例 4.1.3]　線型弾性学の簡単な例について述べたい。まず，§3.2 で述べた棒の曲げの問題(→図 3.2.1)を取り上げる。境界条件は，両端で単純支持とする。この場合の仮定，近似を本節末尾の表 4.1.1 に示す。

棒の内部に発生する応力および歪みは，$\sigma_y = \sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ という状態を仮定する。剪断歪みに関する仮定 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xy} = 0$ は，剪断剛性を無限大とすることに相当する。さらに，棒の中心線 $z = 0$ におけるたわみを $w(x)$ とすると，u, v は

$$u = -\frac{dw}{dx}z, \qquad v = 0 \tag{4.1.27}$$

で近似してよいであろう。したがって，歪み ε_x は

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{d^2 w}{dx^2}z = \kappa_x z \tag{4.1.28a}$$

where

$$\kappa_x = -\frac{d^2 w}{dx^2} \tag{4.1.28b}$$

となる。このとき，曲げﾓｰﾒﾝﾄ M_x は

$$M_x = \iint \sigma_x z\,dydz = \iint E\varepsilon_x z\,dydz = \iint E\kappa_x z^2\,dydz = E\bar{I}\kappa_x \tag{4.1.29a}$$

where

$$\bar{I} = \iint z^2 dydz \tag{4.1.29b}$$

と書ける。$\bar{I}$ は，断面 2 次ﾓｰﾒﾝﾄである。また，歪みｴﾈﾙｷﾞは

$$\begin{aligned}
\text{歪みｴﾈﾙｷﾞ} &= \iiint_\Omega A(\varepsilon)\,dV = \int_0^l dx \iint \frac{1}{2}E{\varepsilon_x}^2\,dydz \\
&= \int_0^l dx \iint \frac{1}{2}E{\kappa_x}^2 z^2\,dydz \\
&= \frac{1}{2}\int_0^l E\bar{I}{\kappa_x}^2\,dx
\end{aligned} \tag{4.1.30}$$

であり，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙは

$$\text{外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ} = -\int_0^l fw\,dx \tag{4.1.31}$$

であるので，(4.1.18)式のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$I[w,\kappa_x]=\frac{1}{2}\int_0^l E\bar{I}\kappa_x{}^2dx-\int_0^l fwdx=\min \qquad (4.1.32a)$$

under

$$\kappa_x=-\frac{d^2w}{dx^2},\quad 0<x<l \qquad (4.1.32b)$$

$$M_x=E\bar{I}\kappa_x,\quad 0<x<l \qquad (4.1.32c)$$

となる。この変分原理の自然条件は，下記の(4.1.33)式である。

(4.1.32)式で与えられる変分問題から導かれる境界値問題(→(4.1.11)～(4.1.13)式)は，以下の境界値問題(4.1.33)～(4.1.35)式に対応している。

力学的条件[M]：

$$\frac{d^2M_x}{dx^2}+f=0,\qquad 0<x<l$$

(4.1.33a)

$$M_x(0)=M_x(l)=0 \qquad (4.1.33b)$$

$$Q_x=\frac{dM_x}{dx},\quad 0<x<l \qquad (4.1.33c)$$

運動学的条件[K]：

$$\kappa_x=-\frac{d^2w}{dx^2},\qquad 0<x<l$$

(4.1.34a)

$$w(0)=w(l)=0 \qquad (4.1.34b)$$

物性学的条件[$P_{\sigma\varepsilon}$]：

$$M_x=E\bar{I}\kappa_x \qquad (4.1.35a)$$

または[$P_{\varepsilon\sigma}$]：

$$\kappa_x=\frac{1}{E\bar{I}}M_x \qquad (4.1.35b)$$

(4.1.33c)式により定義されるQ_xは補助的な変数である。

(4.1.23)式のｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\text{ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ}=\iiint_\Omega B(\sigma)dV$$

$$= \int_0^l dx \iint [\sigma_x \varepsilon_x - A(\varepsilon)] dydz$$

$$= \int_0^l \left(M_x \kappa_x - \frac{1}{2} E\bar{I} \kappa_x{}^2 \right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{E\bar{I}} M_x{}^2 dx \tag{4.1.36}$$

であるので

$$K[M_x] = -\frac{1}{2} \int_0^l \frac{1}{E\bar{I}} M_x{}^2 dx = \max \tag{4.1.37a}$$

$$under \ [M] \ \& \ [P_{\varepsilon\sigma}] \tag{4.1.37b}$$

となる。この変分原理の自然条件は，(4.1.34)式である。

Hellinger-Reissner の原理は

$$J[w, M_x] = \int_0^l \left(-M_x \frac{d^2 w}{dx^2} - \frac{1}{2E\bar{I}} M_x{}^2 \right) dx - \int_0^l fw dx$$

$$+ M_x{}'(0) w(0) - M_x{}'(l) w(l) = stationary \tag{4.1.38}$$

で与えられる。ここで，$M_x{}'$ は剪断力である。この変分原理の自然条件は，(4.1.33)～(4.1.35)式である。

ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(4.1.32)式およびｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(4.1.37)式が持つ物理的意味について簡単に説明したい。簡単のために，左端 $(x = 0)$ で固定され，右端 $(x = l)$ で力または変位が与えられる棒の曲げの問題を考える。結論を述べると，力が与えられる場合には，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理を適用すると，変位が求まる。一方，変位が指定される場合には，ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理を適用すると，力が求まる。

まず，右端で力が与えられる場合を考える。右端で与えられる曲げﾓｰﾒﾝﾄを $\overline{M_x(l)}$，剪断力を $\overline{Q_x(l)}$ とする。この場合のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は，(4.1.32)式を参考にすると

$$I[w] = \frac{E\bar{I}}{2} \int_0^l \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx + \overline{M_x(l)} w'(l) - \overline{Q_x(l)} w(l) = \min \tag{4.1.39a}$$

under

$$w(0) = w'(0) = 0 \tag{4.1.39b}$$

である。拘束条件(4.1.32b or 34a)式は，汎関数の中に含めてある。

拘束条件(4.1.39b)式を満足するように

$$w(x) = x^2(a + bx), \quad 0 < x < l \tag{4.1.40}$$

とすると

$$I[w] = I(a,b) = \frac{E\bar{I}}{2}\int_0^l (2a + 6bx)^2\, dx$$
$$+ \overline{M_x(l)}(2al + 3bl^2) - \overline{Q_x(l)}l^2(a + bl) = \min \tag{4.1.41}$$

を得る。停留条件は

$$0 = \frac{\partial I}{\partial a} = E\bar{I}\int_0^l (2a + 6bx)\cdot 2\,dx + 2l\overline{M_x(l)} - l^2\overline{Q_x(l)}$$
$$= 2E\bar{I}(2la + 3l^2 b) + 2l\overline{M_x(l)} - l^2\overline{Q_x(l)} \tag{4.1.42a}$$
$$0 = \frac{\partial I}{\partial b} = E\bar{I}\int_0^l (2a + 6bx)\cdot 6x dx + 3l^2\overline{M_x(l)} - l^3\overline{Q_x(l)}$$
$$= 6E\bar{I}(l^2 a + 2l^3 b) + 3l^2\overline{M_x(l)} - l^3\overline{Q_x(l)} \tag{4.1.42b}$$

で与えられる。これを解くと

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2E\bar{I}}\left(-\overline{M_x(l)} + l\overline{Q_x(l)}\right) \\ b &= -\frac{1}{6E\bar{I}}\overline{Q_x(l)} \end{aligned} \tag{4.1.43}$$

となる。これを，(4.1.40)式に代入すると

$$w(x) = x^2\left[\frac{1}{2E\bar{I}}\left(-\overline{M_x(l)} + l\overline{Q_x(l)}\right) - \frac{1}{6E\bar{I}}\overline{Q_x(l)}x\right], \quad 0 < x < l \tag{4.1.44}$$

を得る。したがって，右端の変位は

$$\begin{aligned} w(l) &= \frac{l^2}{E\bar{I}}\left(-\frac{1}{2}\overline{M_x(l)} + \frac{1}{3}l\overline{Q_x(l)}\right) \\ w'(l) &= \frac{l}{E\bar{I}}\left(-\overline{M_x(l)} + \frac{1}{2}l\overline{Q_x(l)}\right) \end{aligned} \tag{4.1.45}$$

で与えられるが，これは正解でもある。(4.1.45)式を書き直すと

$$
\begin{aligned}
\overline{M_x(l)} &= \frac{2E\bar{I}}{l^2}\left(3w(l) - 2lw'(l)\right) \\
\overline{Q_x(l)} &= \frac{6E\bar{I}}{l^3}\left(2w(l) - lw'(l)\right)
\end{aligned}
\tag{4.1.46}
$$

となる。

つぎに，右端で変位が与えられる場合を考える。右端で与えられる変位を $\overline{w(l)}$，傾斜を $\overline{w'(l)}$ とする。この場合のｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は，(4.1.37)式を参考にすると

$$
K[M_x, Q_x] = -\frac{1}{2E\bar{I}}\int_0^l M_x{}^2 dx - M_x(l)\overline{w'(l)} + Q_x(l)\overline{w(l)} = \max \tag{4.1.47a}
$$

under

$$
\frac{d^2 M_x}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l \tag{4.1.47b}
$$

$$
Q_x = \frac{dM_x}{dx}, \quad 0 < x < l \tag{4.1.47c}
$$

である。

拘束条件(4.1.47b)式を満足するように

$$
\begin{aligned}
M_x(x) &= \alpha + \beta x, \\
Q_x(l) &= \beta
\end{aligned}
\qquad 0 < x < l \tag{4.1.48}
$$

とすると

$$
\begin{aligned}
K[M_x, Q_x] &= K(\alpha, \beta) \\
&= -\frac{1}{2E\bar{I}}\int_0^l (\alpha + \beta x)^2 dx - (\alpha + \beta l)\overline{w'(l)} + \beta\,\overline{w(l)} = \max
\end{aligned}
\tag{4.1.49}
$$

を得る。停留条件は

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial K}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{E\bar{I}}\int_0^l (\alpha + \beta x) dx - \overline{w'(l)} \\
&= -\frac{1}{E\bar{I}}(l\alpha + \frac{1}{2}l^2\beta) - \overline{w'(l)}
\end{aligned}
\tag{4.1.50a}
$$

$$
\begin{aligned}
0 = \frac{\partial K}{\partial \beta} &= -\frac{1}{E\bar{I}}\int_0^l (\alpha + \beta x)\, x dx - l\,\overline{w'(l)} + \overline{w(l)} \\
&= -\frac{1}{E\bar{I}}(\frac{1}{2}l^2\alpha + \frac{1}{3}l^3\beta) - l\,\overline{w'(l)} + \overline{w(l)}
\end{aligned}
\tag{4.1.50b}
$$

で与えられる。これを解くと

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{E\bar{I}}{l^2}\left(-6\overline{w(l)} + 2l\,\overline{w'(l)}\right)\\ \beta &= \frac{E\bar{I}}{l^3}\left(12\overline{w(l)} - 6l\,\overline{w'(l)}\right)\end{aligned} \qquad (4.1.51)$$

となる。これを，(4.1.48)式に代入すると

$$M_x(x) = \frac{E\bar{I}}{l^2}\left(-6\overline{w(l)} + 2l\,\overline{w'(l)}\right) + \frac{E\bar{I}}{l^3}\left(12\overline{w(l)} - 6l\,\overline{w'(l)}\right)x, \quad 0 < x < l \qquad (4.1.52)$$

を得る。したがって，右端の力は

$$\begin{aligned}M_x(l) &= \frac{2E\bar{I}}{l^2}\left(3\overline{w(l)} - 2l\,\overline{w'(l)}\right)\\ Q_x(l) &= \frac{6E\bar{I}}{l^3}\left(2\overline{w(l)} - l\,\overline{w'(l)}\right)\end{aligned} \qquad (4.1.53)$$

で与えられるが，これは正解でもある。当然のことながら，(4.1.53)式と(4.1.46)式は一致している。

[例 4.1.4]　板の曲げの問題は，棒の曲げの問題を拡張すればよい。

図 4.1.1 に座標系 $O(x, y, z)$ その他を示す。板を R，R の境界 Γ の内で力学的条件 $[M]$ の与えられる境界を Γ_M，運動学的条件 $[K]$ の与えられる境界を Γ_K とする。Γ の外向き法線を n，Γ に沿って測った長さを s とし，Γ_M と Γ_K の交点を $P_\pm$ とする。この場合の仮定，近似を本節末尾の表 4.1.1 に示す。

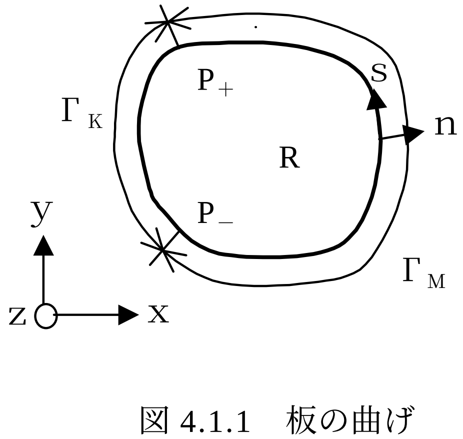

図 4.1.1　板の曲げ

板の内部に発生する応力および歪みは，$\sigma_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ という状態を仮

定する。剪断歪みに関する仮定$\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$は，これらの歪み成分に関する剪断剛性を無限大とすることに相当する。さらに，板の中央面$z = 0$におけるたわみを$w(x, y)$とすると，u, vは

$$
\begin{aligned}
u &= -\frac{\partial w}{\partial x} z, \\
v &= -\frac{\partial w}{\partial y} z
\end{aligned}
\tag{4.1.54}
$$

で近似してよいであろう。したがって，歪み$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$は

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} z = \kappa_x z, \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} z = \kappa_y z, \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z = 2\kappa_{xy} z
\end{aligned}
\tag{4.1.55a}
$$

where

$$
\begin{aligned}
\kappa_x &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\
\kappa_y &= -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \\
\kappa_{xy} &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned}
\tag{4.1.55b}
$$

となる。応力とひずみの関係は

$$
\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y), \\
\sigma_y &= \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x), \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}
\end{aligned}
\tag{4.1.56}
$$

であるので，板の厚さをhとすると，曲げﾓｰﾒﾝﾄM_x, M_y, M_{xy}は

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz = D(\kappa_x + \nu\kappa_y),$$
$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz = D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \tag{4.1.57a}$$
$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz = (1-\nu) D\kappa_{xy}$$

where

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{4.1.57b}$$

と書ける。Dは板の曲げ剛性，νはﾎﾟｱｿﾝ比である。また，歪みｴﾈﾙｷﾞは

$$歪みｴﾈﾙｷﾞ = \iiint_\Omega A(\varepsilon)\, dV = \iint_R dxdy \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{2}\left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy}\right)dz$$
$$= \frac{1}{2}\iint_R dxdy \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x{}^2 + \varepsilon_y{}^2 + 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \frac{(1-\nu)}{2}\gamma_{xy}{}^2\right)dz$$
$$= \frac{1}{2}\iint_R D\left(\kappa_x{}^2 + \kappa_y{}^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}{}^2\right)dxdy \tag{4.1.58}$$

であり，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙは，板の面上に作用する荷重を$\bar{q}$，力学的境界Γ_Mに作用する曲げﾓ-ﾒﾝﾄおよび剪断力を$\overline{M}_n$および$\overline{Q}_n$とすると

$$外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ = -\iint_R \bar{q} w dxdy$$
$$- \int_{\Gamma_M}\left(-\overline{M}_n\frac{\partial w}{\partial n} + \overline{Q}_n w\right)ds \tag{4.1.59}$$

である。したがって，(4.1.18)式のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$I[w, \kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}] = \frac{1}{2}\iint_R D\left(\kappa_x{}^2 + \kappa_y{}^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}{}^2\right)dxdy$$
$$-\iint_R \bar{q} w dxdy - \int_{\Gamma_M}\left(-\overline{M}_n\frac{\partial w}{\partial n} + \overline{Q}_n w\right)ds = \min \tag{4.1.60a}$$

under

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},$$
$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad in\ R \tag{4.1.60b}$$
$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$w = \overline{w},$$
$$\frac{\partial w}{\partial n} = \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} \quad on\ \Gamma_K \tag{4.1.60c}$$

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y),$$
$$M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x), \quad in\ R \tag{4.1.60d}$$
$$M_{xy} = (1-\nu)D\kappa_{xy}$$

となる。ここで，$\overline{w}, \overline{\dfrac{\partial w}{\partial n}}$ は運動学的境界 Γ_K で与えられる変位である。この変分原理の自然条件は，下記の(4.1.61)式で与えられる力学的条件[M]である。

(4.1.60)式で与えられる変分問題から導かれる境界値問題(→(4.1.11)～(4.1.13)式)は，以下の境界値問題(4.1.61)～(4.1.64)式に対応している。

力学的条件[M]：

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + \overline{q} = 0 \quad in\ R \tag{4.161a}$$

$$M_n = \overline{M}_n,$$
$$Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s} = \overline{Q}_n \quad on\ \Gamma_M \tag{4.1.61b}$$

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y},$$
$$\quad in\ R \tag{4.1.61c}$$
$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y}$$

$$M_n = M_x n_x{}^2 + 2M_{xy} n_x n_y + M_y n_y{}^2,$$
$$M_{ns} = -M_x n_x n_y + M_{xy}(n_x{}^2 - n_y{}^2) + M_y n_x n_y, \quad in\ R \tag{4.1.61d}$$
$$Q_n = Q_x n_x + Q_y n_y$$

運動学的条件$[K]$：

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad in\ R \quad \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{4.1.62a}$$

$$w = \overline{w},\quad \frac{\partial w}{\partial n} = \overline{\frac{\partial w}{\partial n}} \quad on\ \Gamma_K \tag{4.2.62b}$$

物性学的条件$[P_{M\kappa}]$：

$$M_x = D(\kappa_x + \nu\kappa_y),\quad M_y = D(\kappa_y + \nu\kappa_x),\quad in\ R \quad M_{xy} = (1-\nu)D\kappa_{xy} \tag{4.1.63a}$$

あるいは$[P_{\kappa M}]$：

$$\kappa_x = \frac{1}{(1-\nu^2)D}(M_x - \nu M_y),\quad \kappa_y = \frac{1}{(1-\nu^2)D}(M_y - \nu M_x),\quad in\ R \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{(1-\nu)D}M_{xy} \tag{4.1.63b}$$

(4.1.61d)式により定義されるQ_x, Q_yは，補助的な変数である。

(4.1.23)式のｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\text{ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ} = \iiint_\Omega B(\sigma)\,dV$$

$$= \iint_R dxdy \int_{-h/2}^{h/2} \left[\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \tau_{xy}\gamma_{xy} - A(\varepsilon)\right]dz$$

$$= \iint_R \begin{bmatrix} M_x\kappa_x + M_y\kappa_y + 2M_{xy}\kappa_{xy} \\ -\frac{1}{2}D\left(\kappa_x{}^2 + \kappa_y{}^2 + 2\nu\kappa_x\kappa_y + 2(1-\nu)\kappa_{xy}{}^2\right) \end{bmatrix} dxdy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_R \frac{1}{(1-\nu^2)D}\left[M_x{}^2 + M_y{}^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu)M_{xy}{}^2\right]dxdy \tag{4.1.64}$$

であるので

$$K[M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]$$

$$= -\frac{1}{2}\iint_R \frac{1}{(1-\nu^2)D}\left[M_x{}^2 + M_y{}^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu)M_{xy}{}^2\right]dxdy$$

$$+\int_{\Gamma_K}\left[-M_n\overline{\frac{\partial w}{\partial n}} + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)\overline{w}\right]ds = \max$$

$$under\ [M]\ \&\ [P_{\kappa M}]$$

$$(4.1.65)$$

となる。この変分原理の自然条件は，(4.1.62)式で与えられる運動学的条件 $[K]$ である。

Hellinger-Reissner の原理は

$$J[w, M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y]$$

$$= \iint_R \left[\begin{aligned}& -M_x\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - M_y\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2M_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ & -\frac{1}{2(1-\nu^2)D}\left(M_x{}^2 + M_y{}^2 - 2\nu M_x M_y + 2(1+\nu)M_{xy}{}^2\right)\end{aligned}\right]dxdy$$

$$-\iint_R \overline{q}wdxdy - \int_{\Gamma_M}\left(-\overline{M}_n\frac{\partial w}{\partial n} + \overline{Q}_n w\right)ds$$

$$-\int_{\Gamma_K}\left[-M_n\left(\frac{\partial w}{\partial n} - \overline{\frac{\partial w}{\partial n}}\right) + \left(Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}\right)(w - \overline{w})\right]ds$$

$$= stationary \qquad (4.1.66)$$

で与えられる。この変分原理の自然条件は，(4.1.61)～(4.1.63)式である。

[例 4.1.5]　最後に，棒の振じりの問題について述べたい。以下に述べる理論は，ｻﾝ･ﾌﾞﾅﾝ(Saint Venant)の振じり問題と呼ばれている。図 4.1.2 に示すように, 棒の断面内に x, y 軸を長手方向に z 軸を取る。この場合の仮定, 近似を本節末尾の表 4.1.1 に示す。

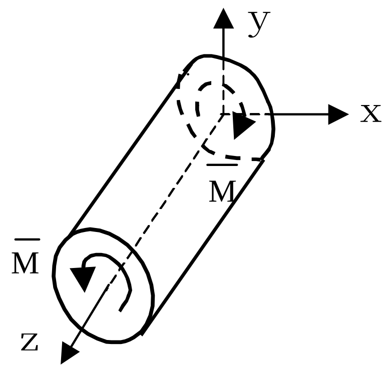

図 4.1.2　棒の振じり

　棒の内部に発生する応力は，$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$ という状態を仮定する。棒の単位長さ当たりの振じれ角を θ とすると，変位 u, v, w は

$$\begin{aligned} u &= -\theta \cdot yz, \\ v &= \theta \cdot xz, \\ w &= w(x, y) \end{aligned} \tag{4.1.67}$$

で近似してよいであろう。したがって, 歪みに関して $\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = \gamma_{xy} = 0$ となる。歪み γ_{zx}, γ_{yz} は

$$\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta \cdot y + \frac{\partial w}{\partial x}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \theta \cdot x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{aligned} \tag{4.1.68}$$

で与えられる。応力とひずみの関係は

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned} \tag{4.1.69}$$

である。棒の断面を S， S の周囲を C とすると， z に沿って変形は一様であるから，一つの断面内の変形を考えればよい。棒の単位長さ当たりの歪みｴﾈﾙｷﾞは

$$\text{単位長さ当たりの歪みｴﾈﾙｷﾞ} = \iint_S A(\varepsilon)\, dxdy$$

$$= \iint_S \frac{1}{2} G(\gamma_{zx}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2)\, dxdy \tag{4.1.70}$$

であり，棒の単位長さ当たりの外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙは，棒に作用する振じりﾓ-ﾒﾝﾄを $\overline{M}$ とすると

単位長さ当たりの外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ$=\overline{M}\theta$ (4.1.71)

である。したがって，(4.1.18)式のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$I[\gamma_{zx},\gamma_{yz},\theta]=\frac{1}{2}\iint_S G({\gamma_{zx}}^2+{\gamma_{yz}}^2)\,dxdy-\overline{M}\theta=\min \tag{4.1.72a}$$

under

$$\left.\begin{aligned}\gamma_{zx}&=\frac{\partial w}{\partial x}-\theta\cdot y,\\ \gamma_{yz}&=\frac{\partial w}{\partial y}+\theta\cdot x\end{aligned}\right\}\quad in\ S \tag{4.1.72b}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_{zx}&=G\gamma_{zx},\\ \tau_{yz}&=G\gamma_{yz}\end{aligned}\right\}\quad in\ S \tag{4.1.72c}$$

となる。この変分原理の停留条件は

$$\begin{aligned}
0&=\delta I\\
&=\iint_S G(\gamma_{zx}\delta\gamma_{zx}+\gamma_{yz}\delta\gamma_{yz})\,dxdy-\overline{M}\delta\theta\\
&=\iint_S\left[\tau_{zx}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial x}-\delta\theta\cdot y\right)+\tau_{yz}\left(\frac{\partial\delta w}{\partial y}+\delta\theta\cdot x\right)\right]dxdy-\overline{M}\delta\theta\\
&=\iint_S\left(\tau_{zx}\frac{\partial\delta w}{\partial x}+\tau_{yz}\frac{\partial\delta w}{\partial y}\right)dxdy\\
&\quad+\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right]\delta\theta\\
&=-\iint_S\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)\delta w\,dxdy\\
&\quad+\int_C(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y)\,\delta w\,ds\\
&\quad+\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right]\delta\theta
\end{aligned} \tag{4.1.73}$$

であるので，自然条件は

$$\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}=0\quad in\ S \tag{4.1.74a}$$

$$\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y=0\quad on\ C \tag{4.1.74b}$$

$$\iint_S (-\tau_{zx} y + \tau_{yz} x)\, dxdy = \overline{M} \tag{4.1.74c}$$

で与えられる。これは，下記の(4.1.75)式で与えられる力学的条件$[M]$である。ここで，n_x, n_y はCの外向き単位法線ﾍﾞｸﾄﾙの x, y 成分，s はCに沿って取られた座標である。

(4.1.72)式で与えられる変分問題から導かれる境界値問題(→(4.1.11)～(4.1.13)式)は，以下の境界値問題(4.1.75)～(4.1.77)式に対応している。

力学的条件$[M]$：

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad in\ S \tag{4.1.75a}$$

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{yz} n_y = 0 \quad on\ C \tag{4.1.75b}$$

$$\iint_S (-\tau_{zx} y + \tau_{yz} x)\, dxdy = \overline{M} \tag{4.1.75c}$$

運動学的条件$[K]$：

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \cdot y, \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \theta \cdot x \end{aligned}\right. \quad in\ S \tag{4.1.76}$$

物性学的条件$[P_{\tau\gamma}]$：

$$\left.\begin{aligned} \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= G\gamma_{yz} \end{aligned}\right. \quad in\ S \tag{4.1.77a}$$

あるいは$[P_{\gamma\tau}]$：

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{zx} &= \frac{1}{G}\tau_{zx}, \\ \gamma_{yz} &= \frac{1}{G}\tau_{yz} \end{aligned}\right. \quad in\ S \tag{4.1.77b}$$

(4.1.23)式のｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\text{棒の単位長さ当たりのｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ} = \iint_S B(\sigma)\, dxdy$$

$$= \iint_S \left[\tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{yz}\gamma_{yz} - A(\varepsilon)\right] dxdy$$

$$=\frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{G}(\tau_{zx}{}^2+\tau_{yz}{}^2)dxdy \tag{4.1.78}$$

であるので

$$K[\tau_{zx},\tau_{yz}]=-\frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{G}(\tau_{zx}{}^2+\tau_{yz}{}^2)dxdy=\max$$

$$under\ [M]\ \&\ [P_{\gamma\tau}] \tag{4.1.79}$$

となる。$-K[\tau_{zx},\tau_{yz}]$について考えると最小値原理となる。この変分原理の自然条件は，拘束条件$[M]$を未定乗数をw,θとする Lagrange の乗数法により緩和すると

$$\begin{aligned}K^*[\tau_{zx},\tau_{yz},w,\theta]=&-\frac{1}{2}\iint_S \frac{1}{G}\left(\tau_{zx}{}^2+\tau_{yz}{}^2\right)dxdy\\&-\iint_S w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdy\\&+\int_C w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y)ds\\&+\theta\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)dxdy-\overline{M}\right]=stationary\end{aligned}$$

$$under\ [P_{\gamma\tau}] \tag{4.1.80}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$\begin{aligned}0=\delta K^*=&-\iint_S \frac{1}{G}\left(\tau_{zx}\delta\tau_{zx}+\tau_{yz}\delta\tau_{yz}\right)dxdy\\&-\iint_S w\left(\frac{\partial\delta\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\delta\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdy\\&+\int_C w(\delta\tau_{zx}n_x+\delta\tau_{yz}n_y)ds\\&+\theta\iint_S(-\delta\tau_{zx}y+\delta\tau_{yz}x)dxdy\\&-\iint_S \delta w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdy\end{aligned}$$

$$+\int_C \delta w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y)ds$$

$$+\delta\theta\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right]$$

$$=-\iint_S(\gamma_{zx}\delta\tau_{zx}+\gamma_{yz}\delta\tau_{yz})dxdy$$

$$+\iint_S\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\tau_{zx}+\frac{\partial w}{\partial y}\delta\tau_{yz}\right)dxdy$$

$$+\theta\iint_S(-\delta\tau_{zx}y+\delta\tau_{yz}x)\,dxdy$$

$$-\iint_S\delta w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+\int_C \delta w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y)ds$$

$$+\delta\theta\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right]$$

$$=-\iint_S\left[\left(\gamma_{zx}-\frac{\partial w}{\partial x}+\theta y\right)\delta\tau_{zx}+\left(\gamma_{yz}-\frac{\partial w}{\partial y}-\theta x\right)\delta\tau_{yz}\right]dxdy$$

$$-\iint_S\delta w\left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+\int_C \delta w(\tau_{zx}n_x+\tau_{yz}n_y)ds$$

$$+\delta\theta\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right] \tag{4.1.81}$$

となる。したがって，(4.1.79)式で与えられるｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理の自然条件は，(4.1.76)式の運動学的条件$[K]$に外ならない。

(4.1.80)式を書き直すと，Hellinger-Reissner の原理は

$$J[w,\theta,\tau_{zx},\tau_{yz}]=K[\tau_{zx},\tau_{yz},w,\theta]$$

$$=-\iint_S\left[\frac{\partial w}{\partial x}\tau_{zx}+\frac{\partial w}{\partial y}\tau_{yz}-\frac{1}{2G}\left(\tau_{zx}{}^2+\tau_{yz}{}^2\right)\right]dxdy$$

$$+\theta\left[\iint_S(-\tau_{zx}y+\tau_{yz}x)\,dxdy-\overline{M}\right]=stationary \tag{4.1.82}$$

で与えられる。この変分原理の自然条件は，(4.1.75)～(4.1.77)式である。

境界値問題(4.1.75)～(4.1.77)式において，τ_{zx}, τ_{yz}とγ_{zx}, γ_{yz}を消去すると

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \quad in\ S \tag{4.1.83a}$$

$$\frac{\partial w}{\partial n}=\frac{\theta}{2}\frac{\partial}{\partial s}(x^2+y^2) \quad on\ C \tag{4.1.83b}$$

$$\overline{M}=G\iint_S\left[\frac{\partial w}{\partial y}x-\frac{\partial w}{\partial x}y+\theta(x^2+y^2)\right]dxdy \tag{4.1.83c}$$

という境界値問題を得る。以下においては，Gは一定とする。

境界値問題(4.1.83)式に対応する変分問題を考えてみよう。ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(4.1.72)式において,(4.1.72b)式の拘束条件を汎関数に代入すると

$$\begin{aligned}I_1[w,\theta]&=I[\gamma_{zx},\gamma_{yz},\theta]_{(4.1.72b)}\\&=\frac{1}{2}\iint_S G\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\theta y\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\theta x\right)^2\right]dxdy-\overline{M}\theta\\&=\frac{1}{2}G\iint_S\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]dxdy\\&\quad-\frac{1}{2}G\theta\int_C w\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2+y^2)\right]ds\\&\quad+\frac{1}{2}G\theta^2\iint_S(x^2+y^2)dxdy-\overline{M}\theta=\min\end{aligned} \tag{4.1.84}$$

となる。この変分問題の自然条件は，(4.1.83)式に外ならない。

(4.1.83)式の境界値問題において

$$w(x,y)=\theta\psi(x,y) \tag{4.1.85}$$

とすると，(4.1.83)式の境界値問題は

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \quad in\ S \tag{4.1.86a}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}(x^2+y^2) \quad on\ C \tag{4.1.86b}$$

$$\overline{M} = G\theta \iint_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dxdy \tag{4.1.86c}$$

となる。すなわち，変数ψとθが分離されている。捩じり剛性を$G\hat{J}$とすると，$\hat{J}$は

$$\hat{J} = \iint_S \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} x - \frac{\partial \psi}{\partial x} y + x^2 + y^2 \right) dxdy \tag{4.1.87}$$

で与えられる。

また，(4.1.84)式の変分問題は

$$\begin{aligned} I_2[\psi,\theta] &= I_1[w,\theta]_{(4.1.85)} \\ &= \frac{1}{2} G\theta^2 \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \\ &\quad - \frac{1}{2} G\theta^2 \int_C \psi \left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2) \right] ds \\ &\quad + \frac{1}{2} G\theta^2 \iint_S (x^2 + y^2) dxdy - \overline{M}\theta = \min \end{aligned} \tag{4.1.88}$$

となるが，この変分問題の自然条件は境界値問題(4.1.86)式に外ならない。I_2が最小となるためには，θ^2の項が最小とならねばならない。すなわち，変分問題

$$\begin{aligned} I_3[\psi] &= I_2[\psi,\theta] \text{の} \theta^2 \text{の項} \\ &= \frac{1}{2} \iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_C \psi \left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2) \right] ds = \min \end{aligned} \tag{4.1.89}$$

を得る。この変分問題の自然条件は，(4.1.86a)，(4.1.86b)式である。

応力関数ϕを導入して，境界値問題(4.1.75)～(4.1.77)式を変形してみよう。(4.1.75a)式より

$$\left. \begin{aligned} \tau_{zx} &= \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \tau_{yz} &= -\frac{\partial \phi}{\partial x} \end{aligned} \right. \quad in\ S \tag{4.1.90}$$

と書ける。これを，(4.1.75b)式に代入すると

$$0 = \frac{\partial \phi}{\partial y} n_x - \frac{\partial \phi}{\partial x} n_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad on\ C \tag{4.1.91}$$

であるので，S が単連結領域の時には

$$\phi = 0 \quad on\ C \tag{4.1.92}$$

としても一般性を失わない。つぎに，(4.1.90)式を(4.1.75c)式に代入すると

$$\begin{aligned} \overline{M} &= \iint_S \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} y - \frac{\partial \phi}{\partial x} x \right) dxdy \\ &= \iint_S \left(-\frac{\partial \phi x}{\partial x} - \frac{\partial \phi y}{\partial y} + 2\phi \right) dxdy \\ &= 2\iint_S \phi dxdy \end{aligned} \tag{4.1.93}$$

となる。

(4.1.76)式と(4.1.77b)式より

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial y} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \theta \cdot y, \\ \frac{1}{G}\frac{\partial \phi}{\partial x} &= -\frac{\partial w}{\partial y} - \theta \cdot x \end{aligned}\right. \quad in\ S \tag{4.1.94}$$

であるので，これより w を消去すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad in\ S \tag{4.1.95}$$

となる。改めて書き直すと，ϕ に関する境界値問題

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = -2G\theta \quad in\ S \tag{4.1.96a}$$

$$\phi = 0 \quad on\ C \tag{4.1.96b}$$

$$\overline{M} = 2\iint_S \phi dxdy \tag{4.1.96c}$$

と書ける。

境界値問題(4.1.96)式に対応する変分問題を求めてみよう。ｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理(4.1.79)式に，平衡応力場を表す(4.1.90)式を代入すると，変分問題

$$K_1[\phi] = K[\tau_{zx}, \tau_{yz}]_{(4.1.90)}$$

$$=-\frac{1}{2G}\iint_S\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy=\max \tag{4.1.97a}$$

under

$$\phi=0 \quad on\ C \tag{4.1.97b}$$

$$\overline{M}=2\iint_S\phi dxdy \tag{4.1.97c}$$

が求まる。この変分問題の自然条件を求めるために，θ を未定乗数とする Lagrange の乗数法により，(4.1.97)式で与えられる変分問題を緩和すると

$$K_1{}^*[\phi,\theta]=-\frac{1}{2G}\iint_S\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$-\theta\left(\overline{M}-2\iint_S\phi dxdy\right)=stationary \tag{4.1.98a}$$

under

$$\phi=0 \quad on\ C \tag{4.1.98b}$$

となる。この変分問題の停留条件を求めると

$$0=\delta K_1=-\frac{1}{G}\iint_S\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)dxdy$$

$$+2\theta\iint_S\delta\phi dxdy-\delta\theta\left(\overline{M}-2\iint_S\phi dxdy\right)$$

$$=\frac{1}{G}\iint_S\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+2G\theta\right)\delta\phi dxdy$$

$$-\delta\theta\left(\overline{M}-2\iint_S\phi dxdy\right) \tag{4.1.99}$$

となる。したがって，(4.1.97)式の変分問題の自然条件は，(4.1.96a)式に外ならない。すなわち，(4.1.96)式の境界値問題は，(4.1.97)式の変分問題と同等である。

(4.1.96)式の境界値問題において

$$\phi(x,y)=G\theta\varphi(x,y) \tag{4.1.100}$$

とすると

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=-2 \qquad in\ S \tag{4.1.101a}$$

$$\varphi=0 \qquad on\ C \tag{4.1.101b}$$

$$\overline{M}=2G\theta\iint_S \varphi dxdy \tag{4.1.101c}$$

となる。すなわち，変数φとθが分離されている。捩じり剛性を$G\hat{J}$とすると，$\hat{J}$は

$$\hat{J}=2\iint_S \varphi dxdy \tag{4.1.102}$$

で与えられる。

また，(4.1.98)式の変分問題は

$$K_2[\varphi,\theta]=K_1{}^*[\phi,\theta]_{(4.1.100)}$$

$$=-\frac{G\theta^2}{2}\iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$+2G\theta^2\iint_S \varphi dxdy-\theta\overline{M}=stationary \tag{4.1.103a}$$

under

$$\varphi=0 \qquad on\ C \tag{4.1.103b}$$

となるが，この変分問題の$\theta=const$の条件下での停留条件を考えれば

$$K_3[\varphi]=-\frac{1}{2}\iint_S\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dxdy$$

$$+2\iint_S \varphi dxdy=\max \tag{4.1.104a}$$

under

$$\varphi=0 \qquad on\ C \tag{4.1.104b}$$

という変分問題を得る。この変分問題の自然条件は，(4.1.101a)に外ならない。

最後に，捩じり剛性$G\hat{J}$の計算法について考えてみよう。(4.1.87)式より

$$\hat{J}=\iint_S\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}x-\frac{\partial\psi}{\partial x}y+x^2+y^2\right)dxdy$$

$$= \int_C \psi\left(xn_y - yn_x\right)ds + \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

$$= -\frac{1}{2}\int_C \psi\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2)\right]ds + \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy \qquad (4.1.105)$$

となる。一方，(4.1.89)式の変分問題の正解をψ_eとすると

$$I_3[\psi_e] = \frac{1}{2}\iint_S \left[\left(\frac{\partial \psi_e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy - \frac{1}{2}\int_C \psi_e\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2)\right]ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_C \psi_e \frac{\partial \psi_e}{\partial n}\, ds - \frac{1}{2}\int_C \psi_e\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2)\right]ds$$

$$= -\frac{1}{4}\int_C \psi_e\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2)\right]ds \qquad (4.1.106)$$

である。したがって，(4.1.89)式の変分問題の近似解をψ_aとすると

$$\hat{J} = -\frac{1}{2}\int_C \psi_e\left[\frac{\partial}{\partial s}(x^2 + y^2)\right]ds + \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

$$= 2I_3[\psi_e] + \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy$$

$$\leq 2I_3[\psi_a] + \iint_S \left(x^2 + y^2\right)dxdy \qquad (4.1.107)$$

が求まる。

つぎに，(4.1.104)式の変分問題の正解をφ_eとすると

$$K_3[\varphi_e] = -\frac{1}{2}\iint_S \left[\left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi_e}{\partial y}\right)^2\right]dxdy + 2\iint_S \varphi_e\, dxdy$$

$$= \iint_S \varphi_e\, dxdy \qquad (4.1.108)$$

である。したがって，(4.1.89)式の変分問題の近似解をψ_aとすると，(4.1.102)式より

$$\hat{J} = 2\iint_S \varphi_e\, dxdy = 2K_3[\varphi_e] \geq 2K_3[\varphi_a] \qquad (4.1.109)$$

が求まる。

故に，(4.1.107)式と(4.1.109)式より

$$2K_3[\varphi_a] \le \hat{J} \le 2I_3[\psi_a] + \iint_S \left(x^2 + y^2\right) dxdy \qquad (4.1.110)$$

となる。

4.1.1　1 次元，2 次元線型弾性問題における仮定

	棒の曲げ	板の曲げ	棒の捩じり (Saint Venant)
座標	軸方向に x, 断面内に y, z	板中央面に x, y, 垂直に z	棒の断面内に x, y, 長手方向に z
仮定	$\sigma_y = \sigma_z = 0$ $\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = \gamma_{xy} = 0$	$\sigma_z = 0$ $\gamma_{zx} = \gamma_{yz} = 0$	$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$
変位	$u = -\dfrac{dw}{dx} z$	$u = -\dfrac{\partial w}{\partial x} z$ $v = -\dfrac{\partial w}{\partial y} z$	$u = -\theta yz$ $v = \theta xz$ $w = w(x, y)$
歪み	$\varepsilon_x = -\dfrac{d^2 w}{dx^2} z$	$\varepsilon_x = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} z$ $\varepsilon_y = -\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} z$ $\gamma_{xy} = -2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} z$	$\gamma_{zx} = -\theta y + \dfrac{\partial w}{\partial x}$ $\gamma_{yz} = \theta x + \dfrac{\partial w}{\partial y}$

応力	$\sigma_x = E\varepsilon_x$	$\sigma_x = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$ $\sigma_y = \dfrac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$ $\tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$	$\tau_{zx} = G\gamma_{zx}$ $\tau_{yz} = G\gamma_{yz}$
単位体積当たりの歪みｴﾈﾙｷﾞ	$\dfrac{1}{2}E\varepsilon_x{}^2$	$\dfrac{E}{2(1-\nu^2)}(\varepsilon_x{}^2 + \varepsilon_y{}^2$ $+ 2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y + \dfrac{1-\nu}{2}\gamma_{xy}{}^2)$	$\dfrac{G}{2}(\gamma_{zx}{}^2 + \gamma_{yz}{}^2)$
単位体積当たりのｺﾝﾌﾟﾚﾒﾝﾀﾘ･ｴﾈﾙｷﾞ	$\dfrac{1}{2E}\sigma_x{}^2$	$\dfrac{1}{2E}[\sigma_x{}^2 + \sigma_y{}^2 - 2\nu\sigma_x\sigma_y$ $+ 2(1+\nu)\tau_{xy}{}^2]$	$\dfrac{1}{2G}(\tau_{zx}{}^2 + \tau_{yz}{}^2)$
備考	剪断剛性無限大	γ_{zx}, γ_{yz} に関する剪断剛性無限大	θ は単位長さ当たりの振じれ角

例 4.1.5 では，ｻﾝ･ﾌﾞﾅﾝ(Saint Venant)の振じり問題について詳しく述べた。(4.1.110)式では，振じり剛性 $G\hat{J}$ の上下界評価式が与えられた。このような評価式が得られるということは，変分法による数値解法の大きな特長の一つである。これらのことについては，§6 で詳細に論じられる。ｸﾞﾛｽな物理量ばかりでなく，変関数の任意点での値，微分値などの上下界評価式を導くことができる。