§3.8　停留解の性質(第 2 変分)

Dirichlet の原理を記述する変分問題(3.6.34)式において，ϕ を停留解とすると

$$K[\phi+\delta\phi] = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial(\phi+\delta\phi)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\phi+\delta\phi)}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial(\phi+\delta\phi)}{\partial z}\right)^2\right] dV$$

$$+\iint_S (\phi+\delta\phi)\, f\, dS$$

$$= K[\phi] - \iiint_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\right) dV + \iint_S \delta\phi\, f\, dS$$

$$-\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\right)^2\right] dV \qquad (3.8.1)$$

となる。第 1 変分 δK は

$$\delta K = -\iiint_\Omega \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\delta\phi}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial\delta\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\right) dV + \iint_S \delta\phi\, f\, dS = 0 \qquad (3.8.2)$$

を，第 2 変分 $\delta^2 K$ は

$$\delta^2 K = K[\phi+\delta\phi] - K[\phi] - \delta K$$

$$= K[\phi+\delta\phi] - K[\phi]$$

$$= -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\delta\phi}{\partial z}\right)^2\right] dV \le 0 \qquad (3.8.3)$$

を満足する。第 2 変分の性質より，この変分問題は最大値問題であることが分かる。このように，停留値の性質は第 2 変分を調べることにより分かる。

また，この変分問題の解は一つしかないことも分かる。すなわち，解が 2 個あったとして，それらを ϕ_1，ϕ_2 とすると

$$K[\phi_1] \ge K[\phi_2] \quad and \quad K[\phi_1] \le K[\phi_2] \qquad (3.8.4)$$

であるので

$$0 = K[\phi_2] - K[\phi_1] = K[\phi_1 + (\phi_2 - \phi_1)] - K[\phi_1]$$

$$= -\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial(\phi_2-\phi_1)}{\partial z}\right)^2\right]dV \qquad (3.8.5)$$

となる。したがって，定数の不定性を残して

$$\phi_1=\phi_2, \quad in\ \Omega \qquad (3.8.6)$$

であることが分かる。

変分問題

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y,y')dx = stationary \qquad (3.8.7a)$$

under

$$y(x_a)=y_a, \quad y(x_b)=y_b \qquad (3.8.7b)$$

の場合には

$$I[y+\delta y]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left(F+F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+\frac{1}{2}F_{yy}\delta y^2+F_{yy'}\delta y\delta y'+\frac{1}{2}F_{y'y'}\delta y'^2+\cdots\right)dx$$

$$=I[y]+\int_{x_a}^{x_b}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)dx+\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{1}{2}F_{yy}\delta y^2+F_{yy'}\delta y\delta y'+\frac{1}{2}F_{y'y'}\delta y'^2\right)dx+\cdots$$

$$(3.8.8)$$

であるので

$$\delta I=\int_{x_a}^{x_b}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'\right)dx \qquad (3.8.9a)$$

$$\delta^2 I=\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{1}{2}F_{yy}\delta y^2+F_{yy'}\delta y\delta y'+\frac{1}{2}F_{y'y'}\delta y'^2\right)dx \qquad (3.8.9b)$$

となる。yを停留関数とすると，$\delta I=0$である。

例えば，$p(x)>0,\ q(x)\ge 0,\ (x_a\le x\le x_b)$として

$$F(x,y,y')=p(x)y'^2+q(x)y^2+2f(x)y, \quad (x_a\le x\le x_b) \qquad (3.8.10)$$

の場合には

$$\delta I=2\int_{x_a}^{x_b}\left(p(x)y'\delta y'+q(x)y\delta y+f(x)\delta y\right)dx$$

$$=-2\int_{x_a}^{x_b}\left(\frac{d\,p(x)y'}{dx}-q(x)y-f(x)\right)\delta y dx \qquad (3.8.11a)$$

$$\delta^2 I = \int_{x_a}^{x_b} \left(p(x)\delta y'^2 + q(x)\delta y^2 \right) dx \qquad (3.8.11b)$$

であるので，$\delta^2 I \geq 0$であり最小値問題である。

§3.9　参考文献

[3.1] 林 毅，村 外志夫，「変分法」，応用数学講座第 13 巻，ｺﾛﾅ社，(1958)

[3.2] 寺沢寛一，「数学概論」，岩波書店

[3.3] 寺沢寛一編，「数学概論(応用編)」，岩波書店，(1960)

[3.4] 伏見康治，「現代物理学を学ぶための古典力学」，岩波書店，(1964)

[3.5] K. Washizu, VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY, International Series of Monographs in Aeronautics and Astronautics, Pergamon Press, (1968).