§3.7　停留解の存在と連続性

汎関数の第 1 変分が恒等的に零となる場合がある。このような場合には，いわば任意の関数が停留解となるが，意味のある停留解は存在しない。

つぎのような独立変数に関して 1 次元の変分問題

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\,dx = stationary \qquad (3.7.1a)$$

under

$$\begin{aligned} &y(x_a)=y_a, && y(x_b)=y_b,\\ &y'(x_a)=y'_a, && y'(x_b)=y'_b,\\ &\cdots\cdots && \cdots\cdots\\ &y^{(n-1)}(x_a)=y^{(n-1)}{}_a, && y^{(n-1)}(x_b)=y^{(n-1)}{}_b \end{aligned} \qquad (3.7.1b)$$

において，汎関数 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ が，他の関数 $G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ により

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=\frac{d}{dx}G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}), \quad x_a\le x\le x_b \qquad (3.7.2)$$

と書けるような場合

$$\begin{aligned} I[y]&=\int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})dx\\ &=G(x_b,y_b,y'_b,\cdots,y^{(n-1)}{}_b)-G(x_a,y_a,y'_a,\cdots,y^{(n-1)}{}_a) \end{aligned} \qquad (3.7.3)$$

となるので，任意の変分に対して $\delta I=0$ が成り立つ。したがって，意味のある停留解が存在しないことになる。例えば，$C_1,C_2,\cdots,C_{n-1}$ を定数として

$$\begin{aligned} F&=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left[C_1y^2+C_2y'^2+\cdots+C_{n-1}(y^{(n-1)})^2\right]\\ &=C_1yy'+C_2y'y''+\cdots+C_{n-1}y^{(n-1)}y^{(n)} \end{aligned} \qquad (3.7.4)$$

を，このような場合の例としてあげられる。

独立変数が複数ある場合，例えば，領域 Ω (境界 Γ)において定義された変分問題

$$I[u]=\iint_\Omega F(x,y,u,u_x,u_y)\,dxdy = stationary \qquad (3.7.5a)$$

under

$$u=\bar{u} \quad on\ \Gamma \qquad (3.7.5b)$$

において，汎関数 F が関数 $A,\ B$ により

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=A_x(x,y,u)+B_y(x,y,u) \quad in\ \Omega \qquad (3.7.6)$$

と表される場合には

$$I[u]=\iint_{\Omega} F\,dxdy=\iint_{\Omega}(A_x+B_y)\,dxdy=\int_{\Gamma}(An_x+Bn_y)\,ds \qquad (3.7.7)$$

となり，I は u の境界値にのみ依存する。したがって，任意の変分に対して $\delta I=0$ が成り立つので，意味のある停留解が存在しないことになる。

板の曲げの問題では，$u(x,y)$ を撓みとすると，汎関数に $u_{xx}u_{yy}-{u_{xy}}^2$ という項が含まれるが

$$u_{xx}u_{yy}-{u_{xy}}^2=(u_x u_{yy})_x-(u_{xy}u_x)_y \qquad (3.7.8)$$

であるので，この項は Euler の方程式に寄与しない。ただし，境界条件には影響を与える。

つぎに，停留解の連続性について考察してみよう。(3.7.1)式で与えられる変分問題で $n=1$ の場合，すなわち

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b} F(x,y,y')\,dx=stationary \qquad (3.7.9\text{a})$$

under

$$y(x_a)=y_a,\quad y(x_b)=y_b \qquad (3.7.9\text{b})$$

において，これまでは変関数 y の 2 回連続微分可能性を仮定してきた。しかし，汎関数の定義には，y は区分的 1 回連続微分可能であれば十分である。そこで，変関数 y は区分的 1 回連続微分可能であると仮定する。

停留条件は

$$0=\delta I=\int_{x_a}^{x_b}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\,dx \qquad (3.7.10)$$

であるが，$\delta y'$ を部分積分で δy に戻す代わりに，逆に δy を $\delta y'$ に変えることを考える。すなわち

$$\begin{aligned}0=\delta I&=\left(\int_{x_a}^{x} F_y\,dx\delta y\right)\Bigg|_{x_a}^{x_b}-\int_{x_a}^{x_b}\left[\left(\int_{x_a}^{x} F_y\,dx\right)-F_{y'}\right]\delta y'dx\\&=-\int_{x_a}^{x_b}\left[\left(\int_{x_a}^{x} F_y\,dx\right)-F_{y'}\right]\delta y'dx \qquad (3.7.11)\end{aligned}$$

と考える。(3.7.9b)式の境界条件により

$$\int_{x_a}^{x_b} \delta y' dx = \delta y(x_b) - \delta y(x_a) = 0 \tag{3.7.12}$$

であるので，ﾄﾞ･ﾎﾞｱ･ﾚｲﾓﾝﾄﾞ(Du Bois-Reymond)の定理（証明は後述。）により

$$\left(\int_{x_a}^{x} F_y dx \right) - F_{y'} = C, \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.13}$$

となる。ここで，C は定数である。左辺は定数に等しいので微分可能である。微分すると，Euler の方程式

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0, \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.14}$$

を得る。(3.7.13)式より

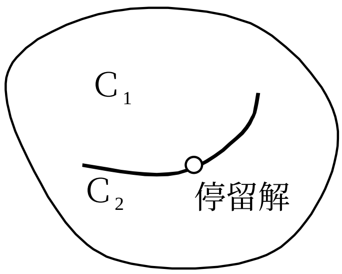
$$F_{y'} = F_{y'}(x, y, y') = \left(\int_{x_a}^{x} F_y dx \right) - C, \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.15}$$

と書け，$F_{y'}$ は微分可能であるので，y' について解いた

$$y' = f(x, y, F_{y'}), \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.16}$$

も微分可能である。すなわち，変関数 y は 2 回微分可能である。

以上をまとめると, 変関数 y を区分的 1 回連続微分可能な関数としても，停留解は 2 回連続微分可能で Euler の方程式を満足する。図 3.7.1 にこの関係を図示する。区分的 1 回連続微分可能な関数で近似しても，いくらでも正解に近づけることが分かる。



C_1:区分的 1 回連続微分可能な関数空間
C_2: 2 回連続微分可能な関数空間

図 3.7.1　変関数の連続性

ﾄﾞ･ﾎﾞｱ･ﾚｲﾓﾝﾄﾞの定理とは，以下のことを主張する。すなわち，関数 $\eta(x)$

は区分的に連続で

$$\int_{x_a}^{x_b} \eta(x)dx = 0 \tag{3.6.17}$$

を満足する任意の関数とするとき，関数 $y(x)$ が任意の $\eta(x)$ に対して

$$\int_{x_a}^{x_b} y(x)\eta(x)dx = 0 \tag{3.6.18}$$

を満足するならば，C を定数として

$$y = C, \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.19}$$

である。

この定理を証明しよう。任意の関数 $y(x)$ に対して，定数 C が存在して

$$\int_{x_a}^{x_b} (y - C)dx = 0 \tag{3.6.20}$$

とすることができる。このとき，任意の $\eta(x)$ に対して

$$\int_{x_a}^{x_b} (y - C)\eta dx = \int_{x_a}^{x_b} y\eta dx - C\int_{x_a}^{x_b} \eta dx = 0 \tag{3.6.21}$$

が成り立つ。$\eta = y - C$ とすると

$$\int_{x_a}^{x_b} (y - C)^2 dx = 0 \tag{3.6.22}$$

となる。ゆえに

$$y = C, \quad x_a \le x \le x_b \tag{3.7.19}$$

が証明された。