§3.6　付帯条件のある場合(関数型の付帯条件)

関数型の付帯条件(subsidiary condition)のある変分問題を考えてみよう。すなわち，変分問題

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y,y')dx=stationary \tag{3.6.1a}$$

under

$$y(x_a)=y_a,\quad y(x_b)=y_b \tag{3.6.1b}$$

$$g(x,y,y')=0,\quad x_a\le x\le x_b \tag{3.6.1c}$$

を考える。境界条件(3.6.1b)式以外に，新たに(3.6.1c)式で与えられる関数方程式が束縛条件になっているが，これが関数型の付帯条件である。

δI を求めると，(3.6.1a)式と(3.6.1b)式より

$$\delta I=\int_{x_a}^{x_b}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')dx=\int_{x_a}^{x_b}\left(F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}\right)\delta y\,dx \tag{3.6.2}$$

である。一方，(3.6.1c)式より

$$\delta g=g_y\delta y+g_{y'}\delta y'=0,\quad x_a\le x\le x_b \tag{3.6.3}$$

であるので，任意の $\lambda(x)$ に対して

$$0=\int_{x_a}^{x_b}\lambda(x)\,\delta g(x,y,y')\,dx=\int_{x_a}^{x_b}\lambda(g_y\delta y+g_{y'}\delta y')dx$$

$$=\int_{x_a}^{x_b}\left[(\lambda g)_y-\frac{d(\lambda g)_{y'}}{dx}\right]\delta y\,dx \tag{3.6.4}$$

となる。(3.6.3)式を満足する δy に対して， $\delta I=0$ となるためには

$$F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}=(\lambda g)_y-\frac{d(\lambda g)_{y'}}{dx},\quad x_a<x<x_b \tag{3.6.5}$$

を満たす $\lambda(x)$ が存在すればよい。すなわち，(3.6.5)式と(3.6.1c)式を停留条件とする変分問題は，(3.6.1)式の変分問題の代わりに

$$I^*[y,\lambda]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y,y')dx-\int_{x_a}^{x_b}\lambda(x)g(x,y,y')dx=stationary \tag{3.6.6a}$$

under

$$y(x_a)=y_a,\quad y(x_b)=y_b \tag{3.6.6b}$$

を考えればよいことになる。これが関数型の付帯条件を持つ変分問題に対する Lagrange の乗数法である。

§3.5 と同様に，§2.2 で述べた付帯条件付きの多変数の停留値問題で，

変分問題を置き換えて考えてみる。そのために，$x_a \le x \le x_b$ を n 等分する。分割幅を Δx とし，分点 $x_a = x_0, x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n = x_b$ における変関数 y の値を $y_a = y_0, y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, y_n = y_b$ とする。すると，(3.6.1)式の変分問題は，多変数の停留値問題

$$I(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x = stationary \tag{3.6.7a}$$

under

$$g(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}) = 0, \quad (i = 0,1,\cdots,n-1) \tag{3.6.7b}$$

で近似される。

未定乗数を $\lambda_i \Delta x$，$(i = 0,1,\cdots,n-1)$ として，Lagrange の乗数法(→§2.2)を適用すると

$$I^*(y_1, y_2, \cdots, y_{n-1}, \lambda) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x$$
$$-\left(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i g(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})\Delta x\right) = stationary \tag{3.6.8}$$

となる。停留条件は

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{3.6.9a}$$

$$\frac{\partial I^*}{\partial \lambda_i} = 0, \quad (i = 0,1,\cdots,n-1) \tag{3.6.9b}$$

で与えられる。

したがって，(3.6.8)式と(3.6.9)式より

$$F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}) - \frac{1}{\Delta x}F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}) + \frac{1}{\Delta x}F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x})$$
$$-\lambda_i g_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})$$
$$+\frac{1}{\Delta x}\lambda_i g_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}) - \frac{1}{\Delta x}\lambda_{i-1} g_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) = 0,$$
$$(i = 1,2,\cdots,n-1) \tag{3.6.10a}$$

$$g(x_i, y_i, \frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}) = 0 \tag{3.6.10b}$$

を得る。$n \to \infty$とすると

$$F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')$$
$$-\left\{\lambda(x)g_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}[\lambda(x)g_{y'}(x,y,y')]\right\} = 0,$$
$$x_a < x < x_b \qquad (3.6.11\text{a})$$
$$g(x,y,y') = 0, \quad x_a \le x \le x_b \qquad (3.6.11\text{b})$$

となる。これが，変分問題(3.6.1)式の停留条件であるが，これは変分問題(3.6.6)式の停留条件に外ならない。すなわち，変分問題(3.6.1)式の代わりに，変分問題(3.6.6)式を考えればよいことが分かる。

[例 3.6.1]　測地線を例にとって，関数型の付帯条件のある場合について具体的に考えてみよう。測地線とは，曲面上の 2 点を結ぶ最短距離を与える曲線のことである。3 次元空間の曲面 $g(x,y,z)=0$ 上の 2 点を $P_a(x_a,y_a,z_a)$, $P_b(x_b,y_b,z_b)$ とし，2 点を結ぶ曲線を媒介変数 t により $x(t), y(t), z(t)$, $(t_a \le t \le t_b)$ と表すことにすると，測地線を求める問題は，変分問題

$$I[x,y,z] = \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt = \min \qquad (3.6.12\text{a})$$

under

$$\begin{aligned} x(t_a) &= x_a, \quad y(t_a) = y_a, \quad z(t_a) = z_a \\ x(t_b) &= x_b, \quad y(t_b) = y_b, \quad z(t_b) = z_b \end{aligned} \qquad (3.6.12\text{b})$$

$$g(x(t),y(t),z(t)) = 0, \quad t_a \le t \le t_b \qquad (3.6.12\text{c})$$

を解くことに等しくなる。束縛条件として，境界条件(3.6.12b)式の外に(3.6.12c)式が加わっているが，これが関数型の付帯条件である。

$\lambda(t)$ を Lagrange の未定定数として，Lagrange の乗数法を適用すると

$$I^*[x,y,z,\lambda] = \int_{t_a}^{t_b} \left(\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} - \lambda g\right) dt = stationary \qquad (3.6.13\text{a})$$

under

$$\begin{aligned} x(t_a) &= x_a, \quad y(t_a) = y_a, \quad z(t_a) = z_a \\ x(t_b) &= x_b, \quad y(t_b) = y_b, \quad z(t_b) = z_b \end{aligned} \qquad (3.6.13\text{b})$$

となるので，変分 $\delta x, \delta y, \delta z$ に対する I^* の変分を δI^* とすると

$$0=\delta I^*=\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{\dot{x}\,\delta\dot{x}+\dot{y}\,\delta\dot{y}+\dot{z}\,\delta\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}-\lambda(g_x\delta x+g_y\delta y+g_z\delta z)\right]dt$$

$$=-\int_{t_a}^{t_b}\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_x\right)\delta x\\+\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_y\right)\delta y\\+\left(\dfrac{d}{dt}\dfrac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_z\right)\delta z\end{array}\right]dt \tag{3.6.14}$$

を得る。したがって，Euler の方程式は

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_x=0,\\&\frac{d}{dt}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_y=0,\\&\frac{d}{dt}\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}+\lambda g_z=0\end{aligned} \tag{3.6.15}$$

となる。曲線の接線ﾍﾞｸﾄﾙを$\vec{t}$とすると

$$\vec{t}=\left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}},\frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}}\right) \tag{3.6.16}$$

であるので，(3.6.15)式は

$$\frac{d\vec{t}}{dt}=-\lambda\nabla g \tag{3.6.17}$$

と書ける。一方

$$\vec{t}^{\,2}=1 \tag{3.6.18}$$

を，tで微分すると

$$\frac{d\vec{t}}{dt}\cdot\vec{t}=0 \tag{3.6.19}$$

である。$\dfrac{d\vec{t}}{dt}\Big/\left|\dfrac{d\vec{t}}{dt}\right|$は曲線の主法線ﾍﾞｸﾄﾙと呼ばれる量である。$\nabla g$は曲面の法線ﾍﾞｸﾄﾙであるので，(3.6.17)式より，測地線の主法線は曲面の法線方向

を向くことが分かる。

滑らかな曲面$g(x,y,z)=0$上に拘束された質点の運動は，媒介変数tを時間と考えると，(3.6.15)式を満足する。何故ならば，滑らかな曲面上では質点の速度$\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}$は一定であり，曲面から質点が受ける反力ﾍﾞｸﾄﾙは，曲面の法線ﾍﾞｸﾄﾙの方向を向くからである。このことは，力学上の問題に対して変分原理が存在することを示唆しており，Hamilton の原理のﾋﾝﾄになったものと思われる。

具体的に球の場合の測地線を考えてみよう。球の半径をR，緯角をϑ，経角をφ とすると

$$\begin{aligned} x &= R\sin\vartheta\cos\varphi \\ y &= R\sin\vartheta\sin\varphi \\ z &= R\cos\vartheta \end{aligned} \tag{3.6.20}$$

であるので，(3.6.12)式で与えられる変分問題は

$$I[\vartheta,\varphi]=\int_{t_a}^{t_b} R\sqrt{\dot{\vartheta}^2+\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2}\,dt=\min \tag{3.6.21a}$$

under

$$\begin{aligned} \vartheta(t_a)&=\vartheta_a, \quad \varphi(t_a)=\varphi_a, \\ \vartheta(t_b)&=\vartheta_b, \quad \varphi(t_b)=\varphi_b \end{aligned} \tag{3.6.21b}$$

となる。この例では，球座標において動径をRとすることにより，付帯条件は自動的に満足されているので, 付帯条件なしで変分問題(3.6.21)式を考えればよい。φ をϑの関数と考えて，変分問題(3.6.21)式を書き直すと

$$I[\varphi]=\int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} R\sqrt{1+\sin^2\vartheta\left(\frac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}\,d\vartheta=\min \tag{3.6.22a}$$

under

$$\varphi(\vartheta_a)=\varphi_a, \quad \varphi(\vartheta_b)=\varphi_b, \tag{3.6.22b}$$

となる。これより

$$0=\delta I=\int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b} R\frac{\sin^2\vartheta\,\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}\,\dfrac{d\delta\varphi}{d\vartheta}}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\left(\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}}\,d\vartheta=-\int_{\vartheta_a}^{\vartheta_b}\frac{d}{d\vartheta}\left[R\frac{\sin^2\vartheta\,\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\left(\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}}\right]\cdot\delta\varphi\,d\vartheta \tag{3.6.23}$$

となるので，Euler の方程式は

$$\frac{d}{d\vartheta}\left[R\frac{\sin^2\vartheta\,\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\left(\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}}\right]=0,\quad \vartheta_a<\vartheta<\vartheta_b \tag{3.6.24}$$

と求まる。

(3.6.24)式を積分すれば，C_1 を積分定数として

$$R\frac{\sin^2\vartheta\,\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}}{\sqrt{1+\sin^2\vartheta\left(\dfrac{d\varphi}{d\vartheta}\right)^2}}=C_1,\quad \vartheta_a<\vartheta<\vartheta_b \tag{3.6.25}$$

が求まる。これより

$$d\varphi=\frac{C_1d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{R^2\sin^2\vartheta-C_1{}^2}}=\frac{C_1d\vartheta}{\sin\vartheta\sqrt{(R^2-C_1{}^2)\sin^2\vartheta-C_1{}^2\cos^2\vartheta}}$$

$$=\frac{\dfrac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\dfrac{1}{\sin^2\vartheta}d\vartheta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\cot\vartheta\right)^2}}=\frac{-\dfrac{d}{d\vartheta}\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\cot\vartheta\right)d\vartheta}{\sqrt{1-\left(\dfrac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\cot\vartheta\right)^2}}$$

$$=-\frac{d}{d\vartheta}\sin^{-1}\left(\frac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\cot\vartheta\right)d\vartheta \tag{3.6.26}$$

となるので，これを積分すると，C_2 を積分定数として

$$\sin(\varphi-C_2)=\frac{-C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}\cot\vartheta \tag{3.6.27}$$

が求まる。(3.6.20)式と(3.6.27)式より

$$x\sin C_2-y\cos C_2-\frac{C_1}{\sqrt{R^2-C_1{}^2}}z=0 \tag{3.6.28}$$

を得る。これより，測地線上の点は原点を含む平面上にある。すなわち，測地線は，2 点 P_a, P_b と球の中心を含む平面と球との交線に外ならないことが分かる。

[例 3.6.2]　他の例として，摩擦のない非圧縮流体に関する Kelvin の原理

について述べる。Kelvin の原理と言うのは，「連続な流れの中で，運動ｴﾈﾙｷﾞを最小にする流れは，非回転な流れである。」ということを主張する。このことを，変分問題として記述すると

$$I[u,v,w]=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2+v^2+w^2)\,dV$$

$$=\min \tag{3.6.29a}$$

under

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.29b}$$

$$un_x+vn_y+wn_z=f \quad on\ S \tag{3.6.29c}$$

となる。ここで，密度が 1 の流体の存在する領域を Ω とし，Ω の境界を S，S の外向き単位法線ベクトルを $\vec{n}=(n_x,n_y,n_z)$ とする。$\vec{u}=(u,v,w)$ は流速ﾍﾞｸﾄﾙであり， f は既知の関数である。また， $dV=dxdydz$ とする。

Kelvin の原理を証明してみよう。(3.6.29b)式と(3.6.29c)式を関数型の付帯条件と考え，ϕ を未定関数として Lagrange の乗数法を適用すると，(3.6.29)式の変分問題は

$$I^*[u,v,w,\phi]=\frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2+v^2+w^2)\,dV$$

$$+\iiint_\Omega \phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dV$$

$$-\iint_S \phi\,(un_x+vn_y+wn_z-f)\,dS$$

$$=stationary \tag{3.6.30}$$

という変分問題を考えることと同等である。停留条件を求めると

$$0=\delta I^*=\iiint_\Omega (u\delta u+v\delta v+w\delta w)\,dV$$

$$+\iiint_\Omega \phi\left(\frac{\partial \delta u}{\partial x}+\frac{\partial \delta v}{\partial y}+\frac{\partial \delta w}{\partial z}\right)dV$$

$$-\iint_S \phi\,(\delta un_x+\delta vn_y+\delta wn_z)\,dS$$

$$+\iiint_\Omega \delta\phi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dV$$

$$-\iint_S \delta\phi\,(un_x + vn_y + wn_z - f)\,dS$$

$$= \iiint_\Omega \left[\left(u - \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \delta u + \left(v - \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) \delta v + \left(w - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \delta w \right] dV$$

$$+ \iiint_\Omega \delta\phi \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) dV$$

$$-\iint_S \delta\phi\,(un_x + vn_y + wn_z - f)\,dS \qquad (3.6.31)$$

となる。これより，変分問題(3.6.30)式の自然条件は

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \qquad in\ \Omega \qquad (3.6.32)$$

および

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \qquad in\ \Omega \qquad (3.6.29b)$$

$$un_x + vn_y + wn_z = f \qquad on\ S \qquad (3.6.29c)$$

となる。すなわち，変分問題(3.6.29)式の自然条件は(3.6.32)式で与えられるので，Kelvin の原理が証明されたことになる。非回転場とは，Ω において $rot\,\vec{u} = 0$ となる流れであるが，このことは速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ(velocity potential)ϕ が存在して $\vec{u} = grad\,\phi$ と表されることに等しい。

変分問題としては, (3.6.30)式で与えられる変分問題を少し書き直した変分問題

$$J[u,v,w,\phi] = I^*[u,v,w,\phi]$$

$$= \frac{1}{2} \iiint_\Omega (u^2 + v^2 + w^2)\,dV$$

$$- \iiint_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} u + \frac{\partial \phi}{\partial y} v + \frac{\partial \phi}{\partial z} w \right) dV$$

$$+ \iint_S \phi f\,dS$$

$$= stationary \qquad (3.6.33)$$

の方が形が整っている。物理的に同じ量を表す $\vec{u}$ と $grad\,\phi$ が，同等に扱われているからである。弾性学の Hellinger-Reissner の原理に相当する。

(3.6.33)式で与えられる変分問題において，自然条件の一つである

(3.6.32)式を予め満足する流れの中で考えてもよいはずである。そうすると

$$K[\phi]=-\frac{1}{2}\iiint_{\Omega}\left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right]dV$$

$$+\iint_S \phi\, f\, dS$$

$$=\max \tag{3.6.34}$$

という変分問題が得られる。この変分問題の自然条件は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}=0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.35a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=f \quad on\ S \tag{3.6.35b}$$

で与えられるが，これらはそれぞれ連続条件(3.6.29b)式と(3.6.29c)式に対応する。すなわち，この変分問題は「非回転な流れの中で，運動ｴﾈﾙｷﾞを最小にする流れは，連続な流れである。」ということを主張する。この変分問題は，Dirichlet の原理と呼ばれている。

(3.6.29)式の変分原理から(3.6.34)式の変分原理に移る過程で，拘束条件と自然条件が入れ替わっている。また，最小値問題から最大値問題に変換されている。

これは，次の理由による。(3.6.30)式の変分問題において，ϕを固定して考えると，この変分問題は最小値問題になっている。このときの$I^*[\vec{u},\phi]$の最小値を，$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given}$と書くことにする。さらに，(3.6.29b)式と(3.6.29c)式を拘束して考えると，すなわち，$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given\ \&\ (3.6.29b,c)}$を求める問題になるが, これは(3.6.29)式の変分問題を考えていることに外ならない。したがって

$$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given\ \&\ (3.6.29b,c)}=\min I[\vec{u}] \tag{3.6.36}$$

である。すると，拘束条件が追加されると，最小値は大きくなるという最小値に関する一般的な性質により

$$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given}\le \min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given\ \&\ (3.6.29b,c)} \tag{3.6.37}$$

であるので

$$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given}\le \min I[\vec{u}] \tag{3.6.38}$$

が成立する。一方，$\phi=given$の条件下で$I^*[\vec{u},\phi]$の最小値を求めることは，

(3.6.31)式において，$\delta\phi = 0$ とすれば

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial\phi}{\partial z} \quad in\ \Omega \tag{3.6.32}$$

とすることであるから，

$$\min I^*[\vec{u},\phi]_{\phi=given} = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] dV$$

$$+ \iint_S \phi\, f\, dS$$

$$= K[\phi] \tag{3.6.39}$$

である。したがって

$$K[\phi] \le \min I[\vec{u}] \tag{3.6.40}$$

である。$K[\phi]$ の停留値は $\min I[\vec{u}]$ に等しいので，$K[\phi]$ の停留値を求める問題は，最大値を求める問題になる。したがって，(3.6.29)式および(3.6.34)式の変分問題の正解をそれぞれ $\vec{u}$ および ϕ とし，近似解をそれぞれ $\vec{u}^*$ および ϕ^* とすると

$$K[\phi^*] \le K[\phi] = I[\vec{u}] = \frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2 + v^2 + w^2)\, dV \le I[\vec{u}^*] \tag{3.6.41}$$

が成り立つ。すなわち，運動のｴﾈﾙｷﾞの上限と下限を求めることができる。(3.6.41)式は，数値計算における誤差の評価として使うことができる。さらに発展させて，関数値そのものの上下限を求めるﾊｲﾊﾟ-ｻｰｸﾙ法(hypercircle method)と呼ばれる方法も考案されている。変分問題の変換については，§6 で詳しく述べる。

Kelvin の原理を，(3.6.29)式の変分問題の代わりに，つぎの形で考えることも可能である。すなわち

$$I[\vec{u}] = \frac{1}{2}\iiint_\Omega \vec{u}^2\, dV = \min \tag{3.6.42a}$$

under

$$\vec{u} = rot\vec{A} \quad in\ \Omega \tag{3.6.42b}$$

$$rot\vec{A}\cdot\vec{n} = f \quad on\ S \tag{3.6.42c}$$

という変分問題である。ここで，$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ はﾍﾞｸﾄﾙ・ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ(vector potential)と呼ばれる量で，簡単な計算により

$$div\vec{u} = div(rot\vec{A}) = 0 \tag{3.6.43}$$

が恒等的に成立する。

(3.6.42)式で与えられる変分問題の停留条件は

$$
\begin{aligned}
0 = \delta I &= \iiint_\Omega \vec{u} \cdot \delta\vec{u}\, dV \\
&= \iiint_\Omega \vec{u} \cdot rot\delta\vec{A}\, dV \\
&= \iiint_\Omega \left[u\left(\frac{\partial \delta A_z}{\partial y} - \frac{\partial \delta A_y}{\partial z} \right) + v\left(\frac{\partial \delta A_x}{\partial z} - \frac{\partial \delta A_z}{\partial x} \right) + w\left(\frac{\partial \delta A_y}{\partial x} - \frac{\partial \delta A_x}{\partial y} \right) \right] dV \\
&= \iiint_\Omega \left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{\partial u\delta A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial u\delta A_y}{\partial z} \right) + \left(\dfrac{\partial v\delta A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v\delta A_z}{\partial x} \right) + \left(\dfrac{\partial w\delta A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial w\delta A_x}{\partial y} \right) \\ - \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\delta A_z - \dfrac{\partial u}{\partial z}\delta A_y \right) - \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\delta A_x - \dfrac{\partial v}{\partial x}\delta A_z \right) - \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\delta A_y - \dfrac{\partial w}{\partial y}\delta A_x \right) \end{array} \right] dV \\
&= \iint_S (\vec{u} \times \vec{n}) \cdot \delta\vec{A}\, dS + \iiint_\Omega rot\vec{u} \cdot \delta\vec{A}\, dV
\end{aligned} \tag{3.6.44}
$$

と書ける。境界条件(3.6.42c)式より，一般性を失わずに

$$\delta\vec{A} = 0 \quad on\ S \tag{3.6.45}$$

としてよいので，(3.6.44)式は

$$0 = \delta I = \iiint_\Omega rot\vec{u} \cdot \delta\vec{A}\, dV \tag{3.6.46}$$

となる。したがって，自然条件は

$$rot\vec{u} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.47}$$

となり，Kelvin の原理が証明された。

また，Dirichlet の原理において， $f = 0$ の場合には，(3.6.34)式の代わりに

$$K[\vec{u}] = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \vec{u}^2\, dV = \max \tag{3.6.48a}$$

under

$$rot\vec{u} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.48b}$$

としてもよい。

(3.6.48)式で与えられる変分問題において，Lagrange の未定関数 $\vec{A}$ を導

入して，(3.6.48b)の条件を緩和すると

$$K^*[\vec{u},\vec{A}] = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \vec{u}^2\, dV + \iiint_\Omega \vec{A}\cdot rot\,\vec{u}\, dV$$

$$= stationary \tag{3.6.49}$$

となる。この変分問題の停留条件は

$$0 = \delta K^* = -\iiint_\Omega \vec{u}\cdot\delta\vec{u}\, dV + \iiint_\Omega \vec{A}\cdot rot\,\delta\vec{u}\, dV + +\iiint_\Omega \delta\vec{A}\cdot rot\,\vec{u}\, dV$$

$$= -\iiint_\Omega (\vec{u} - rot\vec{A})\cdot\delta\vec{u}\, dV + \iint_S (\vec{A}\times\vec{n})\cdot\delta\vec{u}\, dS$$

$$+ \iiint_\Omega \delta\vec{A}\cdot rot\,\vec{u}\, dV \tag{3.6.50}$$

であるので

$$\vec{u} = rot\vec{A} \quad in\ \Omega \tag{3.6.51a}$$

$$\vec{A}\times\vec{n} = 0 \quad on\ S \tag{3.6.51b}$$

$$rot\vec{u} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.48b}$$

となる。したがって，変分問題(3.6.48)式の自然条件は，(3.6.51a)式と(3.6.51b)式で与えられる。$\vec{A}$ はﾍﾞｸﾄﾙ・ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙであり，(3.6.43)式より(3.6.51a)式は(3.6.29b)式に対応する。また，(3.6.51b)式より，S 上で $\vec{A}$ と S の法線 $\vec{n}$ は平衡である。S 上に面内直交座標 ξ, η を取ると

$$\vec{u}\cdot\vec{n} = rot\vec{A}\cdot\vec{n} = \frac{\partial A_\eta}{\partial\xi} - \frac{\partial A_\xi}{\partial\eta} = 0 \quad on\ S \tag{3.6.52}$$

となる。これは，(3.6.29c)式に対応する。すなわち，Dirichlet の原理が証明されたことになる。ただし，この場合は Ω で $\vec{u}=0$ であり，あまり意味のある流れではない。

以上の議論より，Kelvin の原理と Dirichlet の原理における拘束条件と自然条件の関係を整理すると，表 3.6.1 のようになる。

表 3.6.1a　速度ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙをﾍﾞｰｽとする場合

	拘束条件	自然条件
Kelvin の原理	$div\vec{u} = 0$	$\vec{u} = grad\phi$
Dirichlet の原理	$\vec{u} = grad\phi$	$div\vec{u} = 0$

表 3.6.1b　ﾍﾞｸﾄﾙ･ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙをﾍﾞｰｽとする場合

	拘束条件	自然条件
Kelvin の原理	$\vec{u} = rot\vec{A}$	$rot\,\vec{u} = 0$
Dirichlet の原理	$rot\,\vec{u} = 0$	$\vec{u} = rot\vec{A}$

(3.6.29)式の変分問題を少し拡張して

$$I_1[u,v,w] = \frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2 + v^2 + w^2)\, dV$$

$$- \iint_{S_M} g\,(un_x + vn_y + wn_z)\, dS$$

$$= \min \tag{3.6.53}$$

under

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.29b}$$

$$un_x + vn_y + wn_z = f \quad on\ S_K \tag{3.6.29c}$$

を考えてみよう。ここで，$S = S_M + S_K$ とする。この変分問題の自然条件は,

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x},\quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},\quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad in\ \Omega \tag{3.6.32}$$

および

$$\phi = g \quad on\ S_M \tag{3.6.54}$$

で与えられる。これは Kelvin の原理の一つの拡張である。

変分問題(3.6.30)式対応するものは

$$J_1[u,v,w,\phi] = \frac{1}{2}\iiint_\Omega (u^2 + v^2 + w^2)\, dV$$

$$+ \iint_{S_M} (\phi - g)(un_x + vn_y + wn_z)\, dS$$

$$- \iiint_\Omega \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}u + \frac{\partial \phi}{\partial y}v + \frac{\partial \phi}{\partial z}w \right) dV$$

$$+ \iint_{S_K} \phi\, f\, dS$$

$$= stationary \tag{3.6.55}$$

となる。この変分問題の自然条件は，(3.6.32)式，(3.6.29b)式，(3.6.29c)式および(3.6.54)式である。

変分問題(3.6.34)式に対応するものは, (3.6.32)式および(3.6.54)式を拘束することにより

$$K_1[\phi] = -\frac{1}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right] dV$$

$$+ \iint_{S_K} \phi\, f\, dS$$

$$= \max \tag{3.6.56}$$

under

$$\phi = g \quad on\ S_M \tag{3.6.54}$$

という変分問題になる。これは，Dirichlet の原理の一つの拡張である。この変分原理の自然条件は

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.35a}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = f \quad on\ S_K \tag{3.6.57}$$

で与えられるが，これらはそれぞれ連続条件(3.6.29b)式と(3.6.29c)式に対応する。

[例 3.6.3] 最後に静電界におけるｺﾝﾃﾞﾝｻの問題を取り上げる。閉曲面 $S = S_1 + S_2 + S_3$ で囲まれた領域を Ω とし，S_1，S_2 をｺﾝﾃﾞﾝｻの電極とする。S_3 では，絶縁体に接している。座標を $O(x, y, z)$ とし，電界の強さを $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$，$\Omega$ の誘電率を ε，S_1，S_2 に貯えられている電荷を Q, $-Q$ とする。このとき，実現される電界の強さは，連続な電界の内で静電ｴﾈﾙｷﾞを最小にするものである。これを静電界に関するﾄﾑｿﾝ(Thomson)の原理と呼ぶ。変分問題として記述すると

$$I[E_x, E_y, E_z] = \frac{\varepsilon}{2}\iiint_\Omega (E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2)\, dV$$

$$= \min \tag{3.6.58a}$$

under

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.58b}$$

$$\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z)dS=Q \quad on\ S_1 \tag{3.6.58c}$$

$$\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z)dS=-Q \quad on\ S_2 \tag{3.6.58d}$$

$$E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z=0 \quad on\ S_3 \tag{3.6.58e}$$

となる。(3.6.58b)式は電界の連続性を表す。

Thomson の原理を証明してみよう。(3.6.58b)式と(3.6.58e)式を関数型の付帯条件, (3.6.58c)式と(3.6.58d)式を積分型の付帯条件と考え, V を未定関数として Lagrange の乗数法を適用すると, (3.6.58)式で与えられる変分問題は

$$\begin{aligned}
I^*[E_x,E_y,E_z,V,V_1,V_2]&=\frac{\varepsilon}{2}\iiint_\Omega(E_x{}^2+E_y{}^2+E_z{}^2)\,dV\\
&-\varepsilon\iiint_\Omega V\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV\\
&+V_1\left[\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z)dS-Q\right]\\
&+V_2\left[\varepsilon\iint_{S_2}(E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z)dS+Q\right]\\
&+\varepsilon\iint_{S_3}V(E_x n_x+E_y n_y+E_z n_z)dS\\
&=stationary
\end{aligned} \tag{3.6.59}$$

と同等である。(3.6.59)式の変分問題の停留条件は

$$\begin{aligned}
0=\delta I^*&=\varepsilon\iiint_\Omega(E_x\delta E_x+E_y\delta E_y+E_z\delta E_z)\,dV\\
&-\varepsilon\iiint_\Omega V\left(\frac{\partial\delta E_x}{\partial x}+\frac{\partial\delta E_y}{\partial y}+\frac{\partial\delta E_z}{\partial z}\right)dV\\
&+V_1\left[\varepsilon\iint_{S_1}(\delta E_x n_x+\delta E_y n_y+\delta E_z n_z)dS\right]\\
&+V_2\left[\varepsilon\iint_{S_2}(\delta E_x n_x+\delta E_y n_y+\delta E_z n_z)dS\right]
\end{aligned}$$

$$+\varepsilon\iint_{S_3} V(\delta E_x n_x + \delta E_y n_y + \delta E_z n_z)\,dS$$

$$-\varepsilon\iiint_{\Omega} \delta V\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV$$

$$+\delta V_1\left[\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS - Q\right]$$

$$+\delta V_2\left[\varepsilon\iint_{S_2}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS + Q\right]$$

$$+\varepsilon\iint_{S_3} \delta V(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS$$

$$=\varepsilon\iiint_{\Omega}\left[\left(E_x+\frac{\partial V}{\partial x}\right)\delta E_x+\left(E_y+\frac{\partial V}{\partial y}\right)\delta E_y+\left(E_z+\frac{\partial V}{\partial z}\right)\delta E_z\right]dV$$

$$-\left[\varepsilon\iint_{S_1}(V-V_1)(\delta E_x n_x + \delta E_y n_y + \delta E_z n_z)\,dS\right]$$

$$-\left[\varepsilon\iint_{S_2}(V-V_2)(\delta E_x n_x + \delta E_y n_y + \delta E_z n_z)\,dS\right]$$

$$-\varepsilon\iiint_{\Omega} \delta V\left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)dV$$

$$+\delta V_1\left[\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS - Q\right]$$

$$+\delta V_2\left[\varepsilon\iint_{S_2}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS + Q\right]$$

$$+\varepsilon\iint_{S_3} \delta V(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)\,dS \qquad (3.6.60)$$

となるので，自然条件は

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}\quad in\ \Omega \qquad (3.6.61a)$$

$$V = V_1 \quad on\ S_1 \qquad (3.6.61b)$$

$$V = V_2 \quad on\ S_2 \qquad (3.6.61c)$$

の外に

$$\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}=0\quad in\ \Omega \qquad (3.6.58b)$$

$$\varepsilon\iint_{S_1}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)dS = Q \quad on\ S_1 \tag{3.6.58c}$$

$$\varepsilon\iint_{S_2}(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)dS = -Q \quad on\ S_2 \tag{3.6.58d}$$

$$E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z = 0 \quad on\ S_3 \tag{3.6.58e}$$

で与えられる。(3.6.61)式は，領域Ωにおいて電位Vが存在して，閉曲面S_1，S_2上では一定電位になることを示している。すなわち，実在する静電界を与えている。

(3.6.59)式で与えられる変分問題を書き直すと

$$\begin{aligned}
J[E_x,E_y,E_z,V,V_1,V_2] &= I^*[E_x,E_y,E_z,V,V_1,V_2] \\
&= \frac{\varepsilon}{2}\iiint_\Omega (E_x{}^2 + E_y{}^2 + E_z{}^2)\,dV \\
&\quad + \varepsilon\iiint_\Omega \left(\frac{\partial V}{\partial x}E_x + \frac{\partial V}{\partial y}E_y + \frac{\partial V}{\partial z}E_z\right)dV \\
&\quad - \left[\varepsilon\iint_{S_1}(V - V_1)(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)dS + V_1 Q\right] \\
&\quad - \left[\varepsilon\iint_{S_2}(V - V_2)(E_x n_x + E_y n_y + E_z n_z)dS - V_2 Q\right] \\
&= stationary
\end{aligned} \tag{3.6.62}$$

となる。この変分問題の自然条件は, (3.6.61a~c)式と(3.6.58b~e)式である。

(3.6.62)式の変分問題において，(3.6.61)式を拘束すると

$$\begin{aligned}
K[V,V_1,V_2] &= -\frac{\varepsilon}{2}\iiint_\Omega \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right]dV \\
&\quad - (V_1 - V_2)Q \\
&= \max
\end{aligned} \tag{3.6.63}$$

under

$$V = V_1 \quad on\ S_1 \tag{3.6.61b}$$

$$V = V_2 \quad on\ S_2 \tag{3.6.61c}$$

という変分問題が得られる。この変分問題の自然条件は

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad in\ \Omega \tag{3.6.64a}$$

$$\varepsilon \iint_{S_1} \frac{\partial V}{\partial n} dS = -Q \quad on\ S_1 \tag{3.6.64b}$$

$$\varepsilon \iint_{S_2} \frac{\partial V}{\partial n} dS = Q \quad on\ S_2 \tag{3.6.64c}$$

$$\frac{\partial V}{\partial n} = 0 \quad on\ S_3 \tag{3.6.64d}$$

で与えられる。これらは，(3.6.58b~e)式に対応する。