

§ 3.5 付帯条件のある場合(積分型の付帯条件)

既に, § 3.4 で膜の自由振動の問題(固有値問題)を例にとって述べたが, 積分型の付帯条件(subsidiary condition)のある変分問題を考えてみよう。すなわち, 変分問題

$$I[y] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx = \text{stationary} \quad (3.5.1a)$$

under

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b \quad (3.5.1b)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} G(x, y, y') dx = c = \text{given} \quad (3.5.1c)$$

を考える。境界条件(3.5.1b)式以外に, 新たに(3.5.1c)式で与えられる積分式が束縛条件になっているが, これが積分型の付帯条件である。

δI を求めると, (3.5.1a)式と(3.5.1b)式より

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b} (F_y \delta y + F_{y'} \delta y') dx = \int_{x_a}^{x_b} \left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} \right) \delta y dx \quad (3.5.2)$$

である。一方, (3.5.1c)式より

$$\delta \left[\int_{x_a}^{x_b} (G_y \delta y + G_{y'} \delta y') dx \right] = \int_{x_a}^{x_b} \left(G_y - \frac{dG_{y'}}{dx} \right) \delta y dx = 0 \quad (3.5.3)$$

であるから, (3.5.3)式を満足する δy に対して, $\delta I = 0$ となるためには, λ を未知の定数として

$$F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} = \lambda \left(G_y - \frac{dG_{y'}}{dx} \right) \quad x_a < x < x_b \quad (3.5.4)$$

であればよい。すなわち, (3.5.4)式と(3.5.1c)式を停留条件とする変分問題は, (3.5.1)式の変分問題の代わりに

$$I^*[y, \lambda] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx - \lambda \left[\int_{x_a}^{x_b} G(x, y, y') dx - c \right] = \text{stationary} \quad (3.5.5a)$$

under

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b \quad (3.5.5b)$$

を考えればよいことになる。これが積分型の付帯条件を持つ変分問題に対する Lagrange の乗数法である。

変分問題を, § 2.2 で述べた付帯条件付きの多変数の停留値問題に置き換えて考えてもよい。そのために, $x_a \leq x \leq x_b$ を n 等分する。分割幅を Δx と

し，分点 $x_a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = x_b$ における変関数 y の値を $y_a = y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, y_n = y_b$ とする。すると，(3.5.1)式の変分問題は，多変数の停留値問題

$$I(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x = \text{stationary} \quad (3.5.6a)$$

under

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x - c = 0 \quad (3.5.6b)$$

で近似される。

未定乗数を λ として，Lagrange の乗数法(§ 2.2)を適用すると

$$\begin{aligned} I^*(y_1, y_2, \dots, y_{n-1}, \lambda) &= \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x \\ &\quad - \lambda \left(\sum_{i=0}^{n-1} G(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x - c \right) = \text{stationary} \end{aligned} \quad (3.5.7)$$

となる。停留条件は

$$\frac{\partial I^*}{\partial y_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \quad (3.5.8a)$$

$$\frac{\partial I^*}{\partial \lambda} = 0 \quad (3.5.8b)$$

で与えられる。

したがって，(3.5.7)式と(3.5.8)式より

$$\begin{aligned} &F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) - \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) + \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) \\ &\quad - \lambda \left[G_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) - \frac{1}{\Delta x} G_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) + \frac{1}{\Delta x} G_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) \right] \\ &= 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n-1) \end{aligned} \quad (3.5.9a)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} G(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x - c = 0 \quad (3.5.9b)$$

を得る。 $n \rightarrow \infty$ とすると

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y')$$

$$-\lambda \left[G_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} G_{y'}(x, y, y') \right] = 0, \quad x_a \leq x \leq x_b \quad (3.5.10a)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} G(x, y, y') dx = c \quad (3.5.10b)$$

となる。これは変分問題(3.5.5)式の停留条件に外ならない。すなわち，変分問題(3.5.1)式の代わりに，変分問題(3.5.5)式を考えればよいことが分かる。

[例 3.5.1] 積分型の付帯条件のある場合の最も古典的な例として，面積一定で周囲長が最小の図形を求めてみよう。図形の形状を $y = y(x)$ とすると，この y は変分問題

$$I[y] = \oint \sqrt{1 + y'^2} \operatorname{sgn}(dx) dx = \min \quad (3.5.11a)$$

under

$$\oint y dx = c = \text{given} \quad (3.5.11b)$$

の解である。

Lagrange の未定乗数を λ として，Lagrange の乗数法を適用すると

$$I^*[y, \lambda] = \oint \left(\sqrt{1 + y'^2} \operatorname{sgn}(dx) - \lambda y \right) dx + \lambda c = \text{stationary} \quad (3.5.12)$$

となる。 y の変分 δy に対する Euler の方程式を求めると

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\sqrt{1 + y'^2} \operatorname{sgn}(dx) - \lambda y \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\sqrt{1 + y'^2} \operatorname{sgn}(dx) - \lambda y \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \operatorname{sgn}(dx) + \lambda x \right) \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

で与えられる。この式を積分すると， C_1 を積分定数として

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \operatorname{sgn}(dx) = -(\lambda x - C_1) \quad (3.5.14)$$

であるので，これより

$$y' = \frac{(\lambda x - C_1)}{\sqrt{1 - (\lambda x - C_1)^2}} = -\frac{1}{\lambda} \frac{d\sqrt{1 - (\lambda x - C_1)^2}}{dx} \quad (3.5.15)$$

となる。さらに、この式を積分すると、 C_2 を積分定数として

$$y - C_2 = -\frac{1}{\lambda} \sqrt{1 - (\lambda x - C_1)^2} \quad (3.5.16)$$

であるので

$$(x - C_1/\lambda)^2 + (y - C_2)^2 = \frac{1}{\lambda^2} \quad (3.5.17)$$

が求まる。すなわち、周囲長が最小の図形は円に外ならない。

[例 3.5.2] 同じような問題に、周囲長一定で面積最大の図形を求める問題がある。すなわち、この図形の形状を $y = y(x)$ とすると、 y は変分問題

$$I[y] = \oint y dx = \max \quad (3.5.18a)$$

under

$$\oint \sqrt{1 + y'^2} \operatorname{sgn}(dx) dx = c = \text{given} \quad (3.5.18b)$$

の解である。上で述べた面積一定で周囲長最小の場合とまったく同じ方法で解け、その答えは円であるが、ここでは媒介変数 t を導入して考えてみよう。すなわち、図形を

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.5.19)$$

のように表すと、(3.5.18)式の代わりに

$$I[x, y] = \int_{t_a}^{t_b} y \dot{x} dt = \max \quad (3.5.20a)$$

under

$$x(t_b) = x(t_a), \quad y(t_b) = y(t_a) \quad (3.5.20b)$$

$$\int_{t_a}^{t_b} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = c = \text{given} \quad (3.5.20c)$$

となる。ここで、 \dot{x}, \dot{y} は x, y の t による微分である。

(3.5.20)式の変分問題は、 λ を未定定数として Lagrange の乗数法を適用すると

$$I^*[x, y, \lambda] = \int_{t_a}^{t_b} \left(y \dot{x} - \lambda \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \right) dt + \lambda c = \text{stationary} \quad (3.5.21a)$$

under

$$x(t_b) = x(t_a), \quad y(t_b) = y(t_a) \quad (3.5.21b)$$

という変分問題になる。 x, y の変分 $\delta x, \delta y$ に対する I^* の変分を δI^* とすると

$$0 = \delta I^* = \int_{t_a}^{t_b} \left(\delta y \dot{x} + y \delta \dot{x} - \lambda \frac{\dot{x} \delta \dot{x} + \dot{y} \delta \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) dt$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} \left[\left(\lambda \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} - y \right) \delta x + \left(\lambda \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} + \dot{x} \right) \delta y \right] dt \quad (3.5.22)$$

となるので, Euler の方程式は

$$\lambda \frac{d}{dt} \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = y, \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.5.23a)$$

$$\lambda \frac{d}{dt} \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\dot{x}, \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.5.23b)$$

となる。この式を積分すると, C_1, C_2 を積分定数として

$$\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = \frac{1}{\lambda} (y - C_2), \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.5.24a)$$

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} = -\frac{1}{\lambda} (x - C_1), \quad t_a \leq t \leq t_b \quad (3.5.24b)$$

となる。(3.5.24a)式と(3.5.24b)式の両辺を自乗して加えると

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = \lambda^2 \quad (3.5.25)$$

であるので, 周囲長一定で面積最大の図形は円に外ならない。

[例 3.5.3] つぎに, 力学的な問題の例として, 懸垂線(catenary)の問題を考えてみよう。図 3.5.1 に示されるように, 長さ l , 線密度 $\rho(x)$ の鎖線が端点 $P_a(x_a, y_a)$, $P_b(x_b, y_b)$ で固定されて, 張られているものとする。

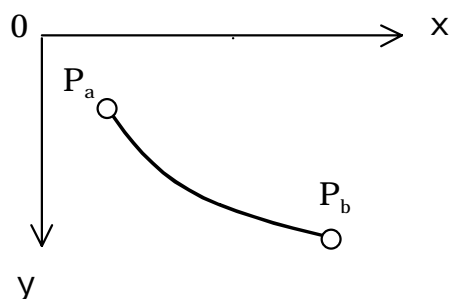


図 3.5.1 懸垂線の釣り合い

鎖の形状を $y = y(x)$ とすると，ポテンシャルエネルギー最小の原理により，位置エネルギー U を最小にする形状が釣り合い状態にある鎖の形状である。重力を外力と考えると，位置エネルギー U ではなくて外力のポテンシャル W の最小を考えることになるが，結果は変わらない。ここでは，伝統的な考えに従って，鎖は重力によって位置エネルギー というポテンシャルを与えられるものとする。ポテンシャルエネルギー最小の原理により，鎖の形状は，積分型付帯条件付きの変分問題

$$I[y] = U = - \int_{x_a}^{x_b} \rho g y \sqrt{1 + y'^2} dx = \min \quad (3.5.26a)$$

under

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b \quad (3.5.26b)$$

$$\int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2} dx = l \quad (3.5.26c)$$

の解である。

未定乗数を λ として，Lagrange の乗数法を適用すると

$$I^*[y, \lambda] = - \int_{x_a}^{x_b} (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} dx + \lambda l = \text{stationary} \quad (3.5.27a)$$

under

$$y(x_a) = y_a, \quad y(x_b) = y_b \quad (3.5.27b)$$

となる。ここで

$$F(y, y') = (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} \quad (3.5.28)$$

とすると， y の変分 δy を考えることにより導かれる Euler の方程式は

$$\frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = 0, \quad x_a < x < x_b \quad (3.5.29)$$

である。この式の両辺に y' を掛け， F が x を含まないことに注意すると

$$0 = (F_{y'})' y' - F_y y' = (F_{y'} y')' - F_{y'} y'' - F_y y' = (F_{y'} y' - F)' \quad (3.5.30)$$

となるので，積分すると

$$F_{y'} y' - F = \frac{(\rho g y + \lambda) y'^2}{\sqrt{1 + y'^2}} - (\rho g y + \lambda) \sqrt{1 + y'^2} = C_1 \quad (3.5.31)$$

となる。ここで， C_1 は積分定数である。(3.5.31)式を書き直すと

$$\sqrt{1 + y'^2} = - \frac{(\rho g y + \lambda)}{C_1} \quad (3.5.32)$$

であるので

$$\frac{dx}{dy} = \frac{C_1}{\sqrt{(\rho gy + \lambda)^2 - C_1^2}} = \frac{C_1}{\rho g} \frac{d}{dy} \ln \left[\rho gy + \lambda + \sqrt{(\rho gy + \lambda)^2 - C_1^2} \right] \quad (3.5.33)$$

が求まる。これを積分すると， C_2 を新たな積分定数として

$$\frac{\rho g}{C_1} x + C_2 = \ln \left[\rho gy + \lambda + \sqrt{(\rho gy + \lambda)^2 - C_1^2} \right] \quad (3.5.34)$$

となるので，書き直すと

$$\exp \left(\frac{\rho g}{C_1} x + C_2 \right) - (\rho gy + \lambda) = \sqrt{(\rho gy + \lambda)^2 - C_1^2} \quad (3.5.35)$$

を得る。この式を自乗すると

$$2(\rho gy + \lambda) = \exp \left(\frac{\rho g}{C_1} x + C_2 \right) + C_1^2 \exp \left(-\frac{\rho g}{C_1} x - C_2 \right) \quad (3.5.36)$$

となる。ここで， C_2 を $C_2 + \ln C_1$ で置き換えると，最終的に

$$(\rho gy + \lambda) = C_1 \cosh \left(\frac{\rho g}{C_1} x + C_2 \right) \quad (3.5.37)$$

が求まる。

積分定数 C_1 ， C_2 ，Lagrangeの未定乗数 λ は，境界条件(3.5.26b)および付帯条件(3.5.26c)より定まる。すなわち

$$(\rho gy_a + \lambda) = C_1 \cosh \left(\frac{\rho g}{C_1} x_a + C_2 \right) \quad (3.5.38a)$$

$$(\rho gy_b + \lambda) = C_1 \cosh \left(\frac{\rho g}{C_1} x_b + C_2 \right) \quad (3.5.38b)$$

$$\begin{aligned} \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2} dx &= \int_{x_a}^{x_b} \cosh \left(\frac{\rho g}{C_1} x + C_2 \right) dx \\ &= \frac{C_1}{\rho g} \left[\sinh \left(\frac{\rho g}{C_1} x_b + C_2 \right) - \sinh \left(\frac{\rho g}{C_1} x_a + C_2 \right) \right] = l \end{aligned} \quad (3.5.38c)$$

より求まる。

[例 3.5.4] 最後に，座屈(buckling)の微小変形理論(Euler 座屈)について述べる。図 3.5.2 に示されるように，長さ l の棒に圧縮力 P を加えてゆくと， P がある値を越えると棒は突然横にたわむ。この現象を座屈という。

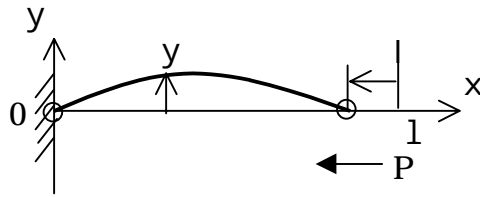


図 3.5.2 棒の座屈

この場合にも，ポテンシャルエネルギー最小の原理が適用できる。棒の歪みエネルギーを U とし，たわむことにより棒の末端が Δl 移動するものとする，棒のたわみ $y = y(x)$ は変分問題

$$I[y] = U = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dx = \min \quad (3.5.39a)$$

under

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (3.5.39b)$$

$$\frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \Delta l \quad (3.5.39c)$$

の解である。両端で単純に支持されているものとする，曲げモーメントに関する境界条件

$$y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0 \quad (3.5.40)$$

が必要であるが，これは自然境界条件として与えられる。

未定乗数を λ とし，Lagrange の乗数法を適用すると

$$I^*[y, \lambda] = \frac{1}{2} \int_0^l (EI y''^2 - \lambda y'^2) dx + \lambda \Delta l = \text{stationary} \quad (3.5.41a)$$

under

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0 \quad (3.5.41b)$$

となる。 y の変分 δy を考えると

$$\begin{aligned} 0 = \delta I^* &= \int_0^l (EI y'' \delta y'' - \lambda y' \delta y') dx \\ &= [EI y'' \delta y']_0^l - [\lambda y' \delta y]_0^l - \int_0^l (EI y''' \delta y' - \lambda y'' \delta y) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= EIy''[l] \delta y'[l] - EIy''[0] \delta y'[0] \\
&\quad - [EIy''' \delta y]_0^l + \int_0^l (EIy''' \delta y + \lambda y'' \delta y) dx \\
&= EIy''[l] \delta y'[l] - EIy''[0] \delta y'[0] \\
&\quad + \int_0^l (EIy''' + \lambda y'') \delta y dx \tag{3.5.42}
\end{aligned}$$

であるので，自然条件(Euler の方程式と自然境界条件)は

$$EIy''' + \lambda y'' = 0, \quad 0 < x < l \tag{3.5.43}$$

$$y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0 \tag{3.5.40}$$

となる。この2式は，境界条件(3.5.39b)式と一緒にあって，一つの固有値問題を形成している。

A を未知定数として，y を

$$y = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} x\right), \quad 0 \leq x \leq l \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3.5.44}$$

の形((3.5.39b)式と(3.5.40)式を満たしている。)に考えて，(3.5.43)式に代入すると

$$\left[EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 - \lambda \right] \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 A = 0, \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3.5.45}$$

となる。これより

$$\lambda = EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3.5.46}$$

となる。

一方， Δl を計算すると

$$\begin{aligned}
\Delta l &= \frac{1}{2} \int_0^l y'^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l A^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \cos^2\left(\frac{n\pi}{l} x\right) dx \\
&= \frac{1}{4} A^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 l \tag{3.5.47}
\end{aligned}$$

であるので，A は

$$A = \frac{2}{n\pi} \sqrt{l \Delta l} \tag{3.5.48}$$

となる。これより

$$y = \frac{2}{n\pi} \sqrt{l\Delta l} \sin\left(\frac{n\pi}{l}x\right) \quad (3.5.49)$$

であるから，曲げの歪みエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EI y''^2 dx = EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \Delta l \quad (3.5.50)$$

となるので，端点に加えられる荷重 P は

$$P = \frac{\partial U}{\partial \Delta l} = EI \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (3.5.51)$$

と求まる。

(3.5.46)式と(3.5.51)式を比較すると， λ は P に外ならないことが分かる。すなわち， y が零でないためには， P は特定の値を取らねばならない。線形理論ではこのように与えられるが，物理現象としては，(3.5.51)式の最小値($n=1$ のとき)より

$$P \geq EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \quad (3.5.52)$$

のときに，零でない y が存在する。すなわち，座屈が生ずると考えるべきであろう。