§3.4　多次元の場合(独立変数が複数ある場合)

座標が $O(x_1, x_2, ..., x_n)$ で与えられる n 次元空間を考える。その空間において，境界面を S とする閉領域 R があり，R で定義された変関数 $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ の汎関数 $I[u]$ に関して

$$I[u] = \iint\cdots\int_R F(x_1, x_2, ..., x_n, u, u_{x_1}, u_{x_2}, ..., u_{x_n})dR = stationary \tag{3.4.1a}$$

under

$$u = \bar{u} \quad on\ S \tag{3.4.1b}$$

という変分問題を取り上げる。

汎関数 I が変関数 u で停留するものとすると，その必要条件は

$$\delta I = \iint\cdots\int_R \left(F_u \delta u + \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} \delta u_{x_i} \right) dR = 0 \tag{3.4.2}$$

である。被積分関数の第 2 項を

$$F_{u_{x_i}} \delta u_{x_i} = \frac{\partial F_{u_{x_i}} \delta u}{\partial x_i} - \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \delta u \tag{3.4.3a}$$

$$\iint\cdots\int_R \frac{\partial F_{u_{x_i}} \delta u}{\partial x_i} dR = \iint\cdots\int_S F_{u_{x_i}} \delta u \cdot n_i dS \tag{3.4.3b}$$

$$n_i dS = \mathrm{sgn}(dx_i) dx_1 dx_2 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n \tag{3.4.3c}$$

を使って変形する。ここで，dx_i は閉領域 R の外側に向けて取られる。また

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} +1 & for\ x > 0 \\ -1 & for\ x < 0 \end{cases} \tag{3.4.4}$$

とする。(3.4.3)式を使って，(3.4.2)式を変形すると，境界条件(3.4.1b)式により δu は境界面 S 上で零になるので

$$\delta I = \iint\cdots\int_S \sum_{i=1}^{n} F_{u_{x_i}} n_i \delta u dS + \iint\cdots\int_R \left(F_u \delta u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \delta u \right) dR$$

$$= \iint\cdots\int_R \left(F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} \right) \delta u\, dS = 0 \tag{3.4.5}$$

となる。したがって，(3.4.1)式の変分問題の Euler の方程式は

$$F_u - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_{u_{x_i}}}{\partial x_i} = 0 \quad in\ R \tag{3.4.6}$$

と求まる。(3.4.6)式を書き直すと

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}F_{u_{x_i}u_{x_j}}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}F_{u_{x_i}u}\frac{\partial u}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{n}F_{u_{x_i}x_i}-F_u=0 \quad in\ R \qquad (3.4.7)$$

と書ける。すなわち，u に関する 2 階の偏微分方程式である。

[例 3.4.1]　例として，図 3.4.1 に示されるような張力 T_0 で張られた膜 R の垂直荷重 f による静的たわみを考える。

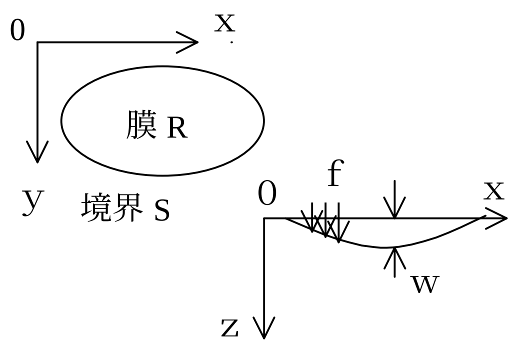

図 3.4.1　荷重による膜のたわみ

§3.2 述べた弦のたわみの場合と同様に，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理が適用できる。座標を $O(x,y)$，膜のたわみを $w(x,y)$ とすると，dx,dy が

$$\sqrt{1+w_x{}^2}dx \approx (1+\frac{1}{2}w_x{}^2)dx,$$
$$\sqrt{1+w_y{}^2}dx \approx (1+\frac{1}{2}w_y{}^2)dy \qquad (3.4.8)$$

となるので，膜の歪みｴﾈﾙｷﾞ U は

$$U=\frac{T_0}{2}\iint_R (w_x{}^2+w_y{}^2)dR \qquad (3.4.9)$$

となる。また，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ W は

$$W=-\iint_R fwdR \qquad (3.4.10)$$

で与えられる。したがって，系全体のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞを Π とすると，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\Pi[w]=U+W$$
$$=\frac{T_0}{2}\iint_R (w_x{}^2+w_y{}^2)dR-\iint_R fwdR=\min \qquad (3.4.11a)$$

under

$$w = 0 \quad on\ S \tag{3.4.11b}$$

となる。

　汎関数Πの変分$\delta\Pi$を取ると，Πの停留条件は

$$\begin{aligned}
\delta\Pi &= T_0 \iint_R (w_x \delta w_x + w_y \delta w_y) dR - \iint_R f\delta w dR \\
&= T_0 \iint_R \left[\frac{\partial w_x \delta w}{\partial x} + \frac{\partial w_y \delta w}{\partial y} - \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} \right) \delta w \right] dR - \iint_R f\delta w dR \\
&= T_0 \int_S (w_x n_x + w_y n_y) \delta w dS - \iint_R \left[T_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f \right] \delta w dR \\
&= -\iint_R \left[T_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f \right] \delta w dR = 0
\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

で与えられる。ここで，(n_x, n_y)はSの外向き法線ﾍﾞｸﾄﾙである。したがって，Euler の方程式は

$$T_0 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + f = 0 \quad in\ R \tag{3.4.13}$$

と求まる。

[例 3.4.2]　上では，膜の静的変形をﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理で考えたが，膜の運動を Hamilton の原理を適用して考えてみよう。膜の面密度を$\rho(x, y)$とすると，運動ｴﾈﾙｷﾞTは

$$T = \frac{1}{2} \iint_R \rho w_t^{\,2} dR \tag{3.4.14}$$

であるので，Hamilton の原理により，膜変位$w(t, x, y)$は

$$\begin{aligned}
I[w] &= \int_{t_a}^{t_b} (T - U - W) dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b} dt \left[\frac{1}{2} \iint_R \rho w_t^{\,2} dR - \frac{T_0}{2} \iint_R (w_x^{\,2} + w_y^{\,2}) dR + \iint_R f w dR \right] \\
&= stationary
\end{aligned} \tag{3.4.15a}$$

under

$$w(t_a, x, y) = w_a(x, y), \quad w(t_b, x, y) = w_b(x, y) \quad in\ R \tag{3.4.15b}$$

$$w(t, x, y) = 0 \quad on\ S \tag{3.4.15c}$$

という変分問題を満足する。

停留条件を求めると

$$\delta I=\int_{t_a}^{t_b}dt\left[\iint_R \rho w_t\delta w_t dR-T_0\iint_R(w_x\delta w_x+w_y\delta w_y)dR+\iint_R f\delta w dR\right]$$

$$=\iint_R\left[-\rho w_t(t_a,x,y)\delta w(t_a,x,y)+\rho w_t(t_b,x,y)\delta w(t_b,x,y)\right]dxdy$$

$$-\int_{t_a}^{t_b}dt\iint_R \rho w_{tt}\delta w dR$$

$$+\int_{t_a}^{t_b}dt\left\{-T_0\int_S(w_x n_x+w_y n_y)\delta w dS+\iint_R\left[T_0(w_{xx}+w_{yy})+f\right]\delta w dR\right\}$$

$$=\int_{t_a}^{t_b}dt\iint_R\left[-\rho w_{tt}+T_0(w_{xx}+w_{yy})+f\right]\delta w dR=0 \tag{3.4.16}$$

となるので，Euler の方程式(膜の運動方程式)は

$$\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=T_0\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+f \quad in\ R \tag{3.4.17}$$

で与えられる。

(3.4.17)式で与えられる運動方程式より，膜の自由振動を考えてみよう。自由振動であるので，$f=0$とする。自由円振動数をω，振動ﾓｰﾄﾞを$W(x,y)$として

$$w=W(x,y)e^{i\omega t} \tag{3.4.18}$$

を，(3.4.17)式に代入すると

$$T_0\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\rho\omega^2 W=0 \quad in\ R \tag{3.4.19}$$

という固有値問題が得られる。Wを一意にするために

$$\iint_R \rho W^2 dR=1 \tag{3.4.20}$$

を課する。§3.5 で詳しく説明するが，(3.4.19)，(3.4.20)式の固有値問題は

$$T_0\iint_R(W_x{}^2+W_y{}^2)dR=\min \tag{3.4.21a}$$

under

$$W=0 \quad on\ S \tag{3.4.21b}$$

$$\iint_R \rho W^2 dR = 1 \tag{3.4.21c}$$

という最小値問題を，未定乗数をω^2として Lagrange の乗数法で考えたときの停留条件に外ならない。すなわち

$$J[W,\omega^2] = T_0 \iint_R (W_x{}^2 + W_y{}^2) dR$$

$$-\omega^2 \left(\iint_R \rho W^2 dR - 1 \right) = stationary \tag{3.4.22a}$$

under

$$W = 0 \quad on\ S \tag{3.4.22b}$$

という変分問題を考えればよい。(3.4.22)式で与えられる変分問題に，§5で述べる変分法の直接解法を適用すれば，$\omega^2, W(x,y)$の近似解を求めることができる。

(3.4.19)式で定義される固有値(自由円振動数あるいは固有円振動数)は，可算無限個存在する。いま，i番目の固有値と固有関数(振動ﾓｰﾄﾞ)を$\omega_i{}^2, W_i(x,y)$，j番目の固有値と固有関数を$\omega_j{}^2, W_j(x,y)$とすると，(3.4.19)式より

$$T_0 \left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2}\right) + \rho \omega_i{}^2 W_i = 0 \quad in\ R \tag{3.4.23a}$$

$$T_0 \left(\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2}\right) + \rho \omega_j{}^2 W_j = 0 \quad in\ R \tag{3.4.23b}$$

となる。(3.4.23a)式，(3.4.23b)式の両辺にW_jとW_iを掛けて引き，Rで積分すると

$$(\omega_i{}^2 - \omega_j{}^2) \iint_R \rho W_i W_j dR$$

$$= -T_0 \iint_R \left[\left(\frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_i}{\partial y^2} \right) W_j - \left(\frac{\partial^2 W_j}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W_j}{\partial y^2} \right) W_i \right] dR \tag{3.4.24}$$

となるが，右辺を変形すると零になり，$\omega_i{}^2 \neq \omega_j{}^2$とすれば

$$\iint_R \rho W_i W_j dR = 0 \qquad for \;\; i \neq j \tag{3.4.25}$$

という直交関係が得られる。したがって，i 番目の固有値の場合には，(3.4.20)式の外に

$$\iint_R \rho W_i W_j dR = 0 \qquad for \;\; j = 1, 2, \cdots, i-1 \tag{3.4.26}$$

が要請される。