§3.3　多次元の場合(変関数が複数ある場合)

変関数が複数ある場合について述べる。すなわち，n 個の変関数があるものとし，それらを $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ として

$$I[y_1, y_2, ..., y_n] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n')dx = stationary \qquad (3.3.1a)$$

under

$$\begin{array}{ll} y_1(x_a) = y_{1a}, & y_1(x_b) = y_{1b}, \\ y_2(x_a) = y_{2a}, & y_2(x_b) = y_{2b}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdot \\ y_n(x_a) = y_{na}, & y_n(x_b) = y_{nb} \end{array} \qquad (3.3.1b)$$

という変分問題を考える。

変関数 y_i の変分を δy_i とし，汎関数 I の変分を δI とすると，I が y_i で停留するための必要条件は

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b} \left(F_{y_1}\delta y_1 + F_{y_1'}\delta y_1' + F_{y_2}\delta y_2 + F_{y_2'}\delta y_2' + \cdots + F_{y_n}\delta y_n + F_{y_n'}\delta y_n' \right) dx = 0 \qquad (3.3.2)$$

で与えられる。境界条件(3.3.1b)式を参照しながら，部分積分を使って，(3.3.2)式を変更すると

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b} \left[\left(F_{y_1} - \frac{dF_{y_1'}}{dx} \right) \delta y_1 + \left(F_{y_2} - \frac{dF_{y_2'}}{dx} \right) \delta y_2 + \cdots + \left(F_{y_n} - \frac{dF_{y_n'}}{dx} \right) \delta y_n \right] dx \qquad (3.3.3)$$

となる。したがって，Euler の方程式は

$$F_{y_i} - \frac{dF_{y_i'}}{dx} = 0, \quad x_a < x < x_b, \quad (i = 1,2,...,n) \qquad (3.3.4)$$

と求まる。

[例 3.3.1]　力学の問題に例をとって，変関数が複数個ある簡単な例について述べる。その前に，力学におけるﾊﾐﾙﾄﾝ(Hamilton)の原理を求めてみよう。図 3.3.1 に示されるように，直交座標が (x, y, z) で与えられる 3 次元空間に n 個の質点が運動をしており，時刻 t における i 番目の質点の位置を $P_i(x_i(t), y_i(t), z_i(t))$ とする。i 番目の質点の質量を m_i，外力を (f_i, g_i, h_i)，j 番目の質点から i 番目の質点に作用する内力を (X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}) とする。作用反作用の法則により

$$X_{ij} = X_{ji}, \quad Y_{ij} = Y_{ji}, \quad Z_{ij} = Z_{ji} \qquad (3.3.5)$$

である。

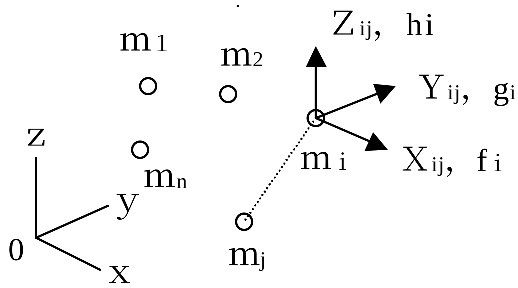

図 3.3.1　質点系の運動

各質点の運動方程式は

$$m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} X_{ij} + f_i,$$

$$m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} + g_i, \qquad (i = 1,2,\ldots n) \tag{3.3.6}$$

$$m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \sum_{j=1}^{n} Z_{ij} + h_i$$

で与えられる。(3.3.6)式のそれぞれの式に仮想変位$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$を乗じて加え，さらに$t_a \le t \le t_b$で積分すると

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} X_{ij} \cdot \delta x_i + \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \cdot \delta y_i + \sum_{j=1}^{n} Z_{ij} \cdot \delta z_i \right) - \sum_{i=1}^{n} \left(f_i \delta x_i + g_i \delta y_i + h_i \delta z_i \right) \right] dt = 0 \tag{3.3.7}$$

を得る。仮想変位$\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$は

$$\begin{aligned} &\delta x_i(t_a) = 0, \quad \delta y_i(t_a) = 0, \quad \delta z_i(t_a) = 0, \\ &\delta x_i(t_b) = 0, \quad \delta y_i(t_b) = 0, \quad \delta z_i(t_b) = 0 \end{aligned} \qquad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{3.3.8}$$

という境界条件を満足するものとする。(3.3.7)式の被積分関数の第 1 項を，境界条件(3.3.8)式を参照しながら部分積分で変形すると

$$\int_{t_a}^{t_b} \left[\sum_{i=1}^{n} \left(m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} \delta x_i + m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} \delta y_i + m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} \delta z_i \right) \right] dt$$

$$= -\int_{t_a}^{t_b}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(m_i\frac{dx_i}{dt}\frac{d\delta x_i}{dt}+m_i\frac{dy_i}{dt}\frac{d\delta y_i}{dt}+m_i\frac{dz_i}{dt}\frac{d\delta z_i}{dt}\delta z_i\right)\right]dt$$

$$= -\delta\left[\int_{t_a}^{t_b}\left[\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i\left(\left(\frac{dx_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy_i}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz_i}{dt}\right)^2\right)\right]dt\right] = -\delta\left[\int_{t_a}^{t_b}Tdt\right] \qquad (3.3.9)$$

となる。ここで，T は質点系全体の運動ｴﾈﾙｷﾞで

$$T = T(\dot{x}_1,\dot{y}_1,\dot{z}_1,\dot{x}_2,\dot{y}_2,\dot{z}_2,...,\dot{x}_n,\dot{y}_n,\dot{z}_n)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i(\dot{x}_i{}^2+\dot{y}_i{}^2+\dot{z}_i{}^2) \qquad (3.3.10)$$

である。$\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ は x_i,y_i,z_i の時間微分を表す。また，内力はﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ力(例えば，万有引力の場合)で，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ $U(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n)$ により

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial x_i},\quad \sum_{j=1}^{n}Y_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial y_i},\quad \sum_{j=1}^{n}Z_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial z_i},\quad (i=1,2,...,n) \qquad (3.3.11)$$

と表されるものとすると，(3.3.7)式の被積分関数の第 2 項は

$$-\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}X_{ij}\cdot\delta x_i+\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\cdot\delta y_i+\sum_{j=1}^{n}Z_{ij}\cdot\delta z_i\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i+\frac{\partial U}{\partial y_i}\delta y_i+\frac{\partial U}{\partial z_i}\delta z_i\right) = \delta U \qquad (3.3.12)$$

と書ける。(3.3.9)，(3.3.12)式を(3.3.7)式に代入すると

$$\delta\left[\int_{t_a}^{t_b}(T-U)dt\right]+\int_{t_a}^{t_b}\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\delta x_i+g_i\delta y_i+h_i\delta z_i\right)\cdot dt = 0 \qquad (3.3.13)$$

を得る。摩擦力などの非保存力がある場合は，この形の変分問題を考えることになる。さらに，外力が保存力でﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを有する場合には，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを $W(x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n)$ とすると

$$f_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i},\quad g_i = -\frac{\partial W}{\partial y_i},\quad h_i = -\frac{\partial W}{\partial z_i},\quad (i=1,2,...,n) \qquad (3.3.14)$$

と書け，(3.3.13)式の左辺第 2 項の被積分関数は

$$\sum_{i=1}^{n}\left(f_i\delta x_i+g_i\delta y_i+h_i\delta z_i\right) = -\delta W \qquad (3.3.15)$$

となるので，(3.3.13)式は

$$\delta\left[\int_{t_a}^{t_b}(T-U-W)dt\right] = 0 \qquad (3.3.16)$$

となる。すなわち

$$I[x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n]=\int_{t_a}^{t_b}(T-U-W)dt=stationary \qquad (3.3.17\text{a})$$

under

$$\begin{aligned} &x_i(t_a)=x_{ia} \quad y_i(t_a)=y_{ia}, \quad z_i(t_a)=z_{ia}, \\ &x_i(t_b)=x_{ib}, \quad y_i(t_b)=y_{ib}, \quad z_i(t_b)=z_{ib} \end{aligned} \qquad (i=1,2,...,n) \qquad (3.3.17\text{b})$$

という変分問題が導かれる。これが Hamilton の原理と呼ばれるものであり，$L=T-U-W$ のことをﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭ関数またはﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｱﾝ(Lagragean)と呼ぶ。

(3.3.1)式の変分問題では，独立変数を x，変関数を $y_1,y_2,...,y_n$ としたが，(3.3.17) 式の変分問題では，独立変数を t，変関数を $x_1,y_1,z_1,x_2,y_2,z_2,...,x_n,y_n,z_n$ としている。この場合の Euler の方程式は

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial L}{\partial x_i}=0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial L}{\partial y_i}=0, \qquad (i=1,2,...,n) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i}-\frac{\partial L}{\partial z_i}=0 \end{aligned} \qquad (3.3.18)$$

となる。この方程式のことを，Lagrange の運動方程式と呼ぶ。書き直すと

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}-\frac{\partial T}{\partial x_i}+\frac{\partial U}{\partial x_i}+\frac{\partial W}{\partial x_i}=0, \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i}-\frac{\partial T}{\partial y_i}+\frac{\partial U}{\partial y_i}+\frac{\partial W}{\partial y_i}=0, \qquad (i=1,2,...,n) \\ &\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{z}_i}-\frac{\partial T}{\partial z_i}+\frac{\partial U}{\partial z_i}+\frac{\partial W}{\partial z_i}=0 \end{aligned} \qquad (3.3.19)$$

と書ける。上の式においては，T の x_i,y_i,z_i による微分の項を含んでいる。上で述べた例では，T は $\dot{x}_i,\dot{y}_i,\dot{z}_i$ のみの関数であるので，これらの項は零であるが，より一般的には，x_i,y_i,z_i の関数となり得るので，この項を含めてある。(3.3.19)式に(3.3.10)，(3.3.11)，(3.3.14)式を代入すると，(3.3.6)式の運動方程式が求まる。

[例 3.3.2] Hamilton の原理を，具体的な力学問題に適用してみる。図 3.3.2

に示されるように，3 本のばね(ばね定数k_1, k_2, k_3)で引っ張られて平衡状態にある 2 個の質点(質量m_1, m_2)の運動を考える。

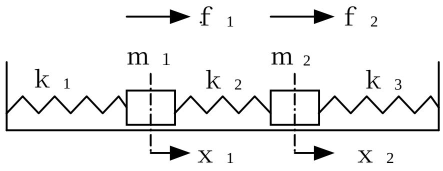

図 3.3.2　ばねで引っ張られた 2 個の質点の運動

時間をt，質点に外力が作用していないときの静的平衡点からの変位をx_1, x_2，質点に作用する外力をf_1, f_2とする。運動ｴﾈﾙｷﾞT，ばねの歪みｴﾈﾙｷﾞU，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙWは

$$T = \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1{}^2 + m_2 \dot{x}_2{}^2) \tag{3.3.20a}$$

$$U = \frac{1}{2}\left[k_1 x_1{}^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3 x_2{}^2\right] \tag{3.3.20b}$$

$$W = -(f_1 x_1 + f_2 x_2) \tag{3.3.20c}$$

で与えられる。したがって，Hamilton の原理は，(3.3.17)式より

$$\begin{aligned} I[x_1, x_2] &= \int_{t_a}^{t_b} (T - U - W)dt \\ &= \int_{t_a}^{t_b} \left\{ \frac{1}{2}(m_1 \dot{x}_1{}^2 + m_2 \dot{x}_2{}^2) - \frac{1}{2}[k_1 x_1{}^2 + k_2(x_2 - x_1)^2 + k_3 x_2{}^2] + (f_1 x_1 + f_2 x_2) \right\} dt \\ &= stationary \end{aligned} \tag{3.3.21a}$$

under

$$\begin{aligned} &x_1(t_a) = x_{1a}, \quad x_1(t_b) = x_{1b}, \\ &x_2(t_a) = x_{2a}, \quad x_2(t_b) = x_{2b} \end{aligned} \tag{3.3.21b}$$

となる。Euler の方程式は，(3.3.19)式より

$$\begin{aligned} &m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + (k_1 + k_2)x_1 - k_2 x_2 = f_1, \\ &m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} - k_2 x_1 + (k_2 + k_3)x_2 = f_2 \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

と求まる。これが，この 2 質点系の運動方程式である。

[例 3.3.3]　つぎに，図 3.3.3 に示される 2 重振子の自由振動の運動方程式を，Hamilton の原理を用いて求めてみる。

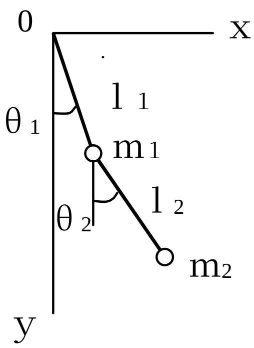

図 3.3.3　2 重振子の自由振動

座標を$O(x,y)$，振子の重りの質量をm_1,m_2，振子の糸の長さをl_1,l_2，質点の座標を$P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$とする。このとき，運動ｴﾈﾙｷﾞ$T$，振子の位置ｴﾈﾙｷﾞ$U$，外力(重力)のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ$W$(位置ｴﾈﾙｷﾞ)は

$$T=\frac{1}{2}\left[m_1(\dot{x}_1{}^2+\dot{y}_1{}^2)+m_2(\dot{x}_2{}^2+\dot{y}_2{}^2)\right] \tag{3.3.23a}$$

$$U=0 \tag{3.3.23b}$$

$$W=-(m_1gy_1+m_2gy_2) \tag{3.3.23c}$$

で与えられる。ここで，gは重力の加速度である。OP_1,P_1P_2がy軸となす角をθ_1,θ_2とすると(力学では，θ_1,θ_2のような変数を一般座標と呼ぶ。)

$$x_1=l_1\sin\theta_1,\quad y_1=l_1\cos\theta_1 \tag{3.3.24a}$$

$$x_2=l_1\sin\theta_1+l_2\sin\theta_2,\quad y_2=l_1\cos\theta_1+l_2\cos\theta_2 \tag{3.3.24b}$$

であるので

$$\dot{x}_1=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1,\quad \dot{y}_1=-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 \tag{3.3.25a}$$

$$\dot{x}_2=l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2,\quad \dot{y}_2=-l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1-l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2 \tag{3.3.25b}$$

と書ける。(3.3.24)，(3.3.25)式を(3.3.23)式に代入すると

$$T=\frac{1}{2}\left\{m_1l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2+m_2\left[l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2+l_2{}^2\dot{\theta}_2{}^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\right\} \tag{3.3.26a}$$

$$U=0 \tag{3.3.26b}$$

$$W=-\left[(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1+m_2gl_2\cos\theta_2\right] \tag{3.3.26c}$$

となる。Hamilton の原理は，(3.3.17)式より

$$
\begin{aligned}
I[\theta_1,\theta_2] &= \int_{t_a}^{t_b}(T-U-W)dt \\
&= \int_{t_a}^{t_b}\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\left\{m_1 l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + m_2\left[l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_2{}^2\dot{\theta}_2{}^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)\right]\right\} \\ +\left[(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 + m_2 gl_2\cos\theta_2\right]\end{array}\right]dt \\
&= stationary
\end{aligned}
\tag{3.3.27a}
$$

under

$$
\begin{aligned}
&\theta_1(t_a)=\theta_{1a},\quad \theta_1(t_b)=\theta_{1b}, \\
&\theta_2(t_a)=\theta_{2a},\quad \theta_2(t_b)=\theta_{2b}
\end{aligned}
\tag{3.3.27b}
$$

となる。Euler の方程式は，(3.3.19)式より

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[(m_1+m_2)l_1{}^2\frac{d\theta_1}{dt} + m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\frac{d\theta_2}{dt}\right] + m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) \\
&\quad +(m_1+m_2)gl_1\sin\theta_1 = 0, \\
&\frac{d}{dt}\left[m_2 l_1 l_2\cos(\theta_1-\theta_2)\frac{d\theta_1}{dt} + m_2 l_2{}^2\frac{d\theta_2}{dt}\right] - m_2 l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\sin(\theta_1-\theta_2) \\
&\quad +m_2 gl_2\sin\theta_2 = 0
\end{aligned}
\tag{3.3.28}
$$

と求まる。これが 2 重振子の非線形の運動方程式である。

Hamilton の原理を用いると運動方程式が簡単に求まるが，これは拘束力(2 重振子の例では糸の張力)はｴﾈﾙｷﾞに寄与しないので，表面に現れないからである。

(3.3.28)式で与えられる運動方程式の線形近似を求めるためには，θ_1,θ_2 が小さいものとして(3.3.26)式を

$$
T = \frac{1}{2}\left\{m_1 l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + m_2\left[l_1{}^2\dot{\theta}_1{}^2 + l_2{}^2\dot{\theta}_2{}^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\right]\right\}
\tag{3.3.29a}
$$

$$
U = 0
\tag{3.3.29b}
$$

$$
W = -\left[(m_1+m_2)gl_1 + m_2 gl_2\right] + \frac{1}{2}\left[(m_1+m_2)gl_1\theta_1{}^2 + m_2 gl_2\theta_2{}^2\right]
\tag{3.3.29c}
$$

により近似する。(3.3.29c)式の右辺第 1 項は，定数であるので無視してよい。この場合の Hamilton の原理は，(3.3.17）式より

$$
I[\theta_1,\theta_2] = \int_{t_a}^{t_b}(T-U-W)dt
$$

$$
= \int_{t_a}^{t_b} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\left\{ m_1 l_1{}^2 \dot{\theta}_1{}^2 + m_2 \left[l_1{}^2 \dot{\theta}_1{}^2 + l_2{}^2 \dot{\theta}_2{}^2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \right] \right\} \\ -\frac{1}{2}\left[(m_1 + m_2) g l_1 \theta_1{}^2 + m_2 g l_2 \theta_2{}^2 \right] \end{bmatrix} dt
$$

$$
= stationary \qquad (3.3.30a)
$$

under

$$
\begin{aligned} &\theta_1(t_a) = \theta_{1a}, \quad \theta_1(t_b) = \theta_{1b}, \\ &\theta_2(t_a) = \theta_{2a}, \quad \theta_2(t_b) = \theta_{2b} \end{aligned} \qquad (3.3.30b)
$$

となる。また，Euler の方程式は，(3.3.19)式より

$$
\begin{aligned} &(m_1 + m_2) l_1{}^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + m_2 l_1 l_2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + (m_1 + m_2) g l_1 \theta_1 = 0, \\ &m_2 l_1 l_2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} + m_2 l_2{}^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} + m_2 g l_2 \theta_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.3.31)
$$

と求まる。これが(3.3.28)式で与えられる非線形運動方程式の線形近似である。Hamilton の原理の成立を保証しながら，運動方程式の線形近似を求めるところが大切な点である。

自由振動問題においては,固有振動数(自由振動の振動数)と振動ﾓｰﾄﾞを求めることが基本的な問題である。そのために, (3.3.31)式において $\theta_1(t), \theta_2(t)$ を

$$
\theta_1(t) = \Theta_1 e^{i\omega t}, \quad \theta_2(t) = \Theta_2 e^{i\omega t} \qquad (3.3.32)
$$

とする。ここで，ω は固有円振動数，(Θ_1, Θ_2) は振動ﾓｰﾄﾞである。(3.3.32)式を(3.3.31)式に代入すると

$$
\begin{aligned} &-\omega^2 \left[(m_1 + m_2) l_1{}^2 \Theta_1 + m_2 l_1 l_2 \Theta_2 \right] + (m_1 + m_2) g l_1 \Theta_1 = 0, \\ &-\omega^2 \left[m_2 l_1 l_2 \Theta_1 + m_2 l_2{}^2 \Theta_2 \right] + m_2 g l_2 \Theta_2 = 0 \end{aligned} \qquad (3.3.33)
$$

となる。行列を使って書き直すと

$$
[B]\{\Theta\} - \omega^2 [A]\{\Theta\} = 0 \qquad (3.3.34)
$$

と書ける。ここで，$\{\Theta\}$ は列ﾍﾞｸﾄﾙ，$[B],[A]$ は行列で

$$
\{\Theta\} = [\Theta_1, \Theta_2]^T \qquad (3.3.35a)
$$

$$
[B] = [B]^T = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.35b)
$$

$$
[A] = [A]^T = \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1{}^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2{}^2 \end{bmatrix} \qquad (3.3.35c)
$$

とし，上付き添字Tは転置を表す。また，$[B],[A]$ は正値行列である。すなわち，零でない任意のΘに対して

$$\begin{aligned}&\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\}>0\\&\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\}>0\end{aligned} \tag{3.3.36}$$

が成立する。

(3.3.34)式は固有値問題で，ω^2の特別な値

$$\det\left([B]-\omega^2[A]\right)=0 \tag{3.3.37}$$

に対して零でない解$\{\Theta\}$が存在する。$\{\Theta\}$が解のとき，その定数倍も解であるので，$\{\Theta\}$を一意にするために

$$\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\}=1 \tag{3.3.38}$$

とする。すると，§2.2 で述べたように，(3.3.34)，(3.3.38)式は，最小値問題

$$\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\}=\min \tag{3.3.39a}$$

under

$$\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\}=1 \tag{3.3.39b}$$

を，未定乗数をω^2として，Lagrange の乗数法を適用したときの停留条件に外ならない。すなわち，(3.3.39)式の最小値問題を解けば，固有振動数も振動ﾓｰﾄﾞも求まることになる。

(3.3.39)式で与えられる最小値問題の解$\{\Theta\}$に対して，(3.3.34)式より

$$\omega^2=\frac{\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\}}{\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\}} \tag{3.3.40a}$$

$$=\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\} \tag{3.3.40b}$$

がいえる。したがって，$\{\Theta\}$を任意に取ると

$$\omega^2=\min\left[\frac{\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\}}{\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\}}\right] \tag{3.3.41}$$

であることが分かる。この最小値問題は，ﾚｲﾘｰ(Rayleigh)の原理と呼ばれる。

(3.3.37)式は，一般に 2 個の相異なる解$\omega_1{}^2,\omega_2{}^2$を有する。$\omega_1{}^2,\omega_2{}^2$のそれぞれに対する固有ﾍﾞｸﾄﾙ(振動ﾓｰﾄﾞ)を$\{\Theta_1\},\{\Theta_2\}$とすると，(3.3.34)式より

$$[B]\{\Theta_1\}-\omega_1{}^2[A]\{\Theta_1\}=0 \tag{3.3.42a}$$

$$[B]\{\Theta_2\}-\omega_2{}^2[A]\{\Theta_2\}=0 \tag{3.3.42b}$$

がいえる。(3.3.42a)式の左から$\{\Theta_2\}^T$を，(3.3.42b)式の左から$\{\Theta_1\}^T$を乗じ

て，これらを引くと

$$(\omega_1{}^2 - \omega_2{}^2)\{\Theta_1\}^T[A]\{\Theta_2\} = 0 \tag{3.3.43}$$

を得る。$\omega_1{}^2 \neq \omega_2{}^2$ を仮定しているので

$$\{\Theta_1\}^T[A]\{\Theta_2\} = 0 \tag{3.3.44}$$

という直交関係が成立する。したがって，$\omega_2{}^2, \Theta_2$ を求める最小値問題には(3.3.39b)式の外に，この条件が新たに加わる。すなわち

$$\{\Theta\}^T[B]\{\Theta\} = \min \tag{3.3.45a}$$

under

$$\{\Theta\}^T[A]\{\Theta\} = 1 \tag{3.3.45b}$$

$$\{\Theta_1\}^T[A]\{\Theta\} = 1 \tag{3.3.45c}$$

となる。(3.3.41)式でもこれが要請される。

このように，固有値問題と最小値問題(変分問題)には密接な関係がある。§5 で詳しく議論する。