§3.2　汎関数に高階の導関数が含まれる場合

今までは，汎関数 I の中に変関数 y の 1 階微分しか出てこない場合であった。本節では，n 階までの高階微分が現れる場合について述べる。すなわち

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y,y',y'',...,y^{(n)})dx=stationary \tag{3.2.1a}$$

under

$$\begin{array}{ll} y(x_a)=y_a, & y(x_b)=y_b \\ y'(x_a)=y'_a, & y'(x_b)=y'_b \\ y''(x_a)=y''_a, & y''(x_b)=y''_b \\ \cdots\cdots\cdots\cdot & \cdots\cdots\cdots\cdot \\ y^{(n-1)}(x_a)=y^{(n-1)}{}_a, & y^{(n-1)}(x_b)=y^{(n-1)}{}_b \end{array} \tag{3.2.1b}$$

で与えられる変分問題を考える。

変関数 y の変分を δy とすると，汎関数 I が y で停留するための必要条件は，I の変分を δI として

$$\delta I=\int_{x_a}^{x_b}\left(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y''+\cdots+F_{y^{(n)}}\delta y^{(n)}\right)dx=0 \tag{3.2.2}$$

である。境界条件(3.2.1b)式を参照しながら，部分積分を繰り返して(3.2.2)式を変形すると

$$\delta I=\int_{x_a}^{x_b}\left(F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}+\cdots+(-1)^n\frac{d^nF_{y^{(n)}}}{dx^n}\right)\delta y dx \tag{3.2.3}$$

となる。したがって，この場合の Euler の方程式は

$$F_y-\frac{dF_{y'}}{dx}+\frac{d^2F_{y''}}{dx^2}+\cdots+(-1)^n\frac{d^nF_{y^{(n)}}}{dx^n}=0,\qquad x_a<x<x_b \tag{3.2.4}$$

で与えられる。

[例 3.2.1]　高階微分の現れる例として，図 3.2.1 に示される一様断面の棒の曲げについて述べる。長さ l の棒に垂直荷重 $f(x)$ が作用している。簡単のため，棒の両端は固定されているものとする。1 次元的な応力状態を仮定して，応力を σ，歪みを ε，ﾔﾝｸﾞ率を E とすると

$$\sigma=E\varepsilon \tag{3.2.5}$$

であり，棒の撓みを $w(x)$ とすると歪み ε は

$$\varepsilon = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{dw}{dx}z\right) = -\frac{d^2w}{dx^2}z \tag{3.2.6}$$

で近似される。棒の断面に作用する曲げﾓｰﾒﾝﾄを M_x とすると

$$M_x = \iint \sigma z dydz = -\iint E\frac{d^2w}{dx^2}z^2 dydz = -EI\frac{d^2w}{dx^2} \tag{3.2.7}$$

と書ける。ここで，I は断面の 2 次ﾓｰﾒﾝﾄで，その定義は

$$I = \iint z^2 dydz \tag{3.2.8}$$

である。

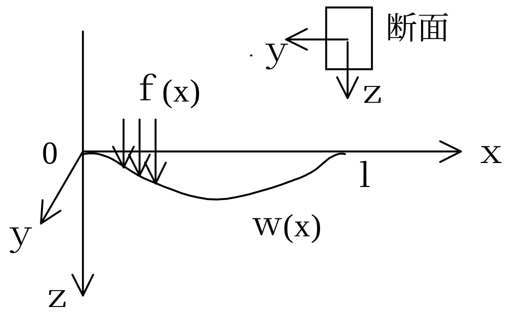

図 3.2.1　荷重による棒の曲げ

棒の歪みｴﾈﾙｷﾞ U は

$$U = \iiint \frac{1}{2}E\varepsilon^2 dxdydz = \int_0^l dx \iint \frac{1}{2}E\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 z^2 dydz = \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx \tag{3.2.9}$$

で与えられ，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ W は

$$W = -\int_0^l fwdx \tag{3.2.10}$$

で与えられる。したがって，系全体のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞを Π とすると，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\begin{aligned}\Pi[w] &= U + W \\ &= \frac{1}{2}EI\int_0^l \left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)^2 dx - \int_0^l fwdx = \min\end{aligned} \tag{3.2.11a}$$

under

$$\begin{aligned} &w(0)=0, \quad w(l)=0, \\ &w'(0)=0, \quad w'(l)=0 \end{aligned} \tag{3.2.11b}$$

となる。境界条件(3.2.11b)式は，両端固定の条件である。

上の例は，(3.2.1)式の変分問題でnを 2 とし，yをwで置き換えた場合である。Fを

$$F(x,w,w',w'')=\frac{1}{2}EIw''^2-fw \qquad (3.2.12)$$

として，(3.2.4)式を適用すると，Euler の方程式は

$$EI\frac{d^4w}{dx^4}-f=0, \qquad 0<x<l \qquad (3.2.13)$$

と求まる。

Euler の方程式(3.2.12)式の一般解は，C_0,C_1,C_2,C_3を積分定数として

$$w(x)=\frac{1}{EI}\int dx\int dx\int dx\int dx\cdot f(x)+C_3x^3+C_2x^2+C_1x+C_0 \qquad (3.2.14)$$

と求まる。断面が一様でない場合には，Euler の方程式は

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(EI\frac{d^2w}{dx^2}\right)-f=0, \qquad 0<x<l \qquad (3.2.15)$$

となるので，数値的に解を求めることになる。(3.2.15)式を差分近似して解いてもよいが，4 階微分を近似することになる。まったく異なる考え方として，(3.2.11)式の変分問題(ただし，EIは積分記号の中に入る。)を直接解く方法がある。この場合には，変関数wは区分的に 2 階連続微分可能であればよい。§4 で詳しく述べるが，変分法の直接解法には二つの考え方がある。その一つは，境界条件(3.2.11b)式を満足するように，変関数wを，例えば$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{(n-1)}$を未知定数として

$$w(x)=x^2(1-x)^2(\alpha_0+\alpha_1x+\alpha_2x^2+\cdots+\alpha_{(n-1)}x^{(n-1)}), \qquad 0\le x\le l \qquad (3.2.16)$$

と仮定する方法である。未知定数$\alpha_0,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{(n-1)}$は，(3.2.16)式を，(3.2.11a)式に代入してできる多変数の最小値問題より決定される。もう一つの方法は，§1 および§2 で述べたように，領域$0\le x\le l$を有限個の区間に分割して，区間毎に変関数wを近似することである。ただし，(3.2.11)式の変分問題の場合には，隣接する区間の接点において，wおよびdw/dxの連続性が要求される。

境界条件が両端固定でなくて，両端単純支持の場合を考えてみよう。この場合には，境界条件は(3.2.11b)式の代わりに

$$w(0)=0, \quad w(l)=0 \qquad (3.2.17)$$

となる。何故ならば，Π の変分 $\delta\Pi$ を考えると

$$\delta\Pi = \int_0^l EIw''\delta w'' dx - \int_0^l f\delta w \cdot dx$$

$$= -EIw''(0)\delta w'(0) + EIw''(l)\delta w'(l) + \int_0^l \left(EI\frac{d^4 w}{dx^4} - f \right)\delta w \cdot dx \qquad (3.2.18)$$

となり

$$w''(0) = 0, \quad w''(l) = 0 \qquad (3.2.19)$$

が自然境界条件になるので，(3.2.7)式より曲げﾓｰﾒﾝﾄ M_x が両端で零となる条件に等しいからである。

(3.2.17)式の代わりに

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0 \qquad (3.2.20)$$

とすると，左端が固定，右端が自由の条件になり，右端では

$$w''(l) = 0, \quad w'''(l) = 0 \qquad (3.2.21)$$

という自然境界条件を満足しなければならない。（3.2.21）式の第 2 式は右端で剪断力が零となる条件である。