§3. 変分問題(汎関数の停留値問題)

本章では，関数の関数である汎関数の停留値問題，すなわち，変分問題について考える。変分法が，多変数関数の停留値問題の延長として捉えられることについては，前章で詳しく述べたが，§3.1 では変分法の伝統的な考え方について述べる。§3.5 と§3.6 では，前章で述べた方法を用いて考える。また，§3.2～§3.4 においては，古典的な変分法の基礎的事項を解説する。さらに，§3.7 では変関数の連続性について，§3.8 では停留点の性質について述べる。

§3.1　汎関数の停留条件(Euler の方程式)

区間 $x_a \le x \le x_b$ で定義される 2 階連続微分可能な未知関数 $y = y(x)$ に対して，次式で与えられる停留値問題(stationary value problem)を考える。

$$I[y] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')dx = stationary \tag{3.1.1a}$$

under

$$\begin{aligned} y(x_a) &= y_a = given, \\ y(x_b) &= y_b = given \end{aligned} \tag{3.1.1b}$$

このような問題は，変分問題(variational problem)と呼ばれる。y のことを変関数(argument function)，y の関数である $I[y]$ のことを汎関数(functional)といい，(3.1.1b)式は境界条件(boundary condition)と呼ばれる。また，I を停留させる関数のことを停留関数(stationary function)という。

上において，変関数 y の 2 階連続微分可能性を要求したが，これは以下の議論において，停留関数の満たすべき条件が 2 階の微分方程式になるからである。汎関数(3.1.1a)が定義可能であるためには，y は区分的 1 階連続微分可能であればよい。§3.7 で述べるが，実は区分的 1 階連続微分可能な関数の中で汎関数 I を停留させるものは，2 階連続微分可能であることが証明される。したがって，最初から 2 階連続微分可能性を仮定しても導かれる結論は正しい。y が区分的に 1 階連続微分可能であればよいということは，理論的に重要であるばかりでなく，境界値問題の数値解法に変分法を応用する際に，y にどのような連続性を要求すべきかを決めるので極

めて重要な意味を有する。しかし，しばらくの間は y に 2 階連続微分可能性を要求しておく。

図 3.1.1 に示されるように， $y = y(x)$ が停留関数であるとして， y からすこし離れた関数 $y^* = y(x) + \alpha\eta(x)$ を考える。ここで，$\eta(x)$ は $y(x)$ と同じ連続性を有し，境界で零になる任意の関数とする。また， α はﾊﾟﾗﾒ-ﾀである。したがって, 比較に使われる関数 y^* は y と同じ境界条件(3.1.1b)式を満足している。y^* のことを，許容比較関数(admissible comparison function)と呼ぶ。

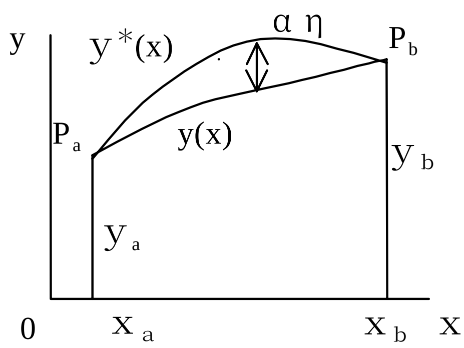

図 3.1.1　停留関数と許容比較関数

y が I の停留関数であるので

$$\left[\frac{dI[y+\alpha\eta]}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} = 0 \tag{3.1.2}$$

であることが必要である。$dI[y+\alpha\eta]/d\alpha$ が

$$\frac{dI[y+\alpha\eta]}{d\alpha} = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\eta + F_{y'}(x, y+\alpha\eta, y'+\alpha\eta')\eta'\right]dx \tag{3.1.3}$$

であるので

$$\left[\frac{dI[y+\alpha\eta]}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y')\eta + F_{y'}(x,y,y')\eta'\right]dx \tag{3.1.4}$$

となる。部分積分により被積分関数の第 2 項を書き換えると

$$\left[\frac{dI[y+\alpha\eta]}{d\alpha}\right]_{\alpha=0} = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right]\eta \cdot dx \tag{3.1.5}$$

となる。ここで， η が境界で零になることが使われている。η は任意にとれるので

$$\frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = 0 \qquad (x_a < x < x_b) \tag{3.1.6}$$

である。(3.1.6)式を書き直すと

$$0 = \frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = F_{y'y'}y'' + F_{y'y}y' + F_{y'x} - F_y \tag{3.1.7}$$

という 2 階微分方程式になる。(3.1.7)式は汎関数 $I[y]$ が y で停留するための必要条件であり，ｵｲﾗｰ(Euler)の方程式と呼ばれる。

変関数 y の変化 $\delta y = \alpha\eta$ のことを y の変分(variation)と呼ぶが、このときの汎関数 $I[y]$ の１次の変化を δI と書いて， I の変分と呼ぶ。δI を求めると

$$\delta I = \left[\frac{dI[y+\alpha\eta]}{d\alpha}\right]_{\alpha=0}\alpha = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y')\alpha\eta + F_{y'}(x,y,y')\alpha\eta'\right]dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'\right]dx \tag{3.1.8}$$

となる。したがって， y が停留関数のとき(3.1.2)式により

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'\right]dx$$

$$= \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right]\delta y \cdot dx = 0 \tag{3.1.9}$$

であることが必要である。(3.1.9)式を導く際に，境界条件(3.1.1b)式が用いられた。汎関数 $I[y]$ の停留条件を(3.1.2)式で考えるよりも，この形で考える方が便利なことが多いので, 以下においては主としてこの形で議論する。

(3.1.1)式で与えられる変分問題において, 境界条件(3.1.1b)式のない場合について考えてみよう。すると，(3.1.9)式は

$$\delta I = \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y')\delta y + F_{y'}(x,y,y')\delta y'\right]dx$$

$$= -F_{y'}(x_a, y(x_a), y'(x_a))\delta y(x_a) + F_{y'}(x_b, y(x_b), y'(x_b))\delta y(x_b)$$

$$+ \int_{x_a}^{x_b}\left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right]\delta y \cdot dx = 0 \tag{3.1.10}$$

となる。δy は任意に取れるので，Euler の方程式(3.1.6)式の外に

$$\begin{aligned} &F_{y'}(x_a, y(x_a), y'(x_a)) = 0 \\ &F_{y'}(x_b, y(x_b), y'(x_b)) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.11}$$

が，汎関数 I が停留するための必要条件となる。このように，停留条件の

一部として求まる境界条件のことを自然境界条件(natural boundary condition)と呼び，Euler の方程式と合わせて自然条件(natural condition)と呼ぶ。(3.1.1b)式の境界条件のように，最初から与えられる条件のことを束縛条件(constraint condition)という。また，(3.1.1b)式の条件を変位条件(displacement condition)，(3.1.11)式の条件を力学的条件(mechanical condition)と呼ぶ。

[例 3.1.1]　例として，図 3.1.2 に示されるような張力 T で引っ張られた長さ l の弦に，垂直方向に荷重 $f(x)$ が作用している場合の弦の垂直方向変位 $y(x)$ を求める問題を考える。

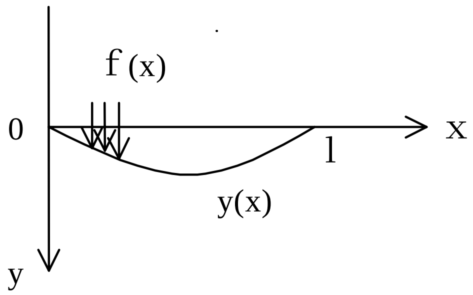

図 3.1.2　荷重による弦のたわみ

ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理を適用する。弦の歪みｴﾈﾙｷﾞは弦の長さが

$$\int_0^l \sqrt{1+y'^2}\,dx - l = \frac{1}{2}\int_0^l y'^2 dx \qquad (3.1.12)$$

だけ延びるので，歪みｴﾈﾙｷﾞ U は

$$U = \frac{T}{2}\int_0^l y'^2 dx \qquad (3.1.13a)$$

となる。また，外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ W は

$$W = -\int_0^l fy\,dx \qquad (3.1.13b)$$

となる。したがって，この系のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙを Π とすると，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理は

$$\Pi[y] = U + W = \int_0^l \left(\frac{T}{2} y'^2 - fy \right) dx = \min \qquad (3.1.14a)$$

under

$$\begin{aligned} &y(0) = 0, \\ &y(l) = 0 \end{aligned} \tag{3.1.14b}$$

によって与えられる。

$F(x, y, y') = \dfrac{T}{2} y'^2 - fy$ として，(3.1.6)式を用いると Euler の方程式は

$$0 = \frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = Ty'' + f .....0 < x < l \tag{3.1.15}$$

となる。すなわち, 弦のたわみの平衡方程式である。したがって，y は C_0, C_1 を積分定数として

$$y = -\frac{1}{T}\int dx \int dx \cdot f(x) + C_1 x + C_0 \tag{3.1.16}$$

と求まる。

Euler の方程式は，汎関数が停留するための必要条件にすぎないことを例によって示す。そのために

$$I[y] = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(y'^2 - y^2\right) dx = stationary \tag{3.1.17a}$$

under

$$\begin{aligned} &y(0) = 0 \\ &y(\pi) = 1 \end{aligned} \tag{3.1.17b}$$

という変分問題を考える。

この変分問題の Euler の方程式は，$F(x, y, y') = \dfrac{1}{2}(y'^2 - y^2)$ として(3.1.6)式より

$$0 = \frac{dF_{y'}}{dx} - F_y = y'' - y .....0 < x < \pi \tag{3.1.18}$$

となる。(3.3.18)式の一般解は，C_1, C_2 を積分定数として

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x \tag{3.1.19}$$

で与えられるが，境界条件(3.1.17b)式を満足することができない。すなわち，(3.1.17)式で与えられる変分問題の Euler の方程式の解は，この変分問題の解にはなっていない。