§2.2　付帯条件のある場合

閉領域Dで定義された関数$f(y_1, y_2, \cdots, y_n)$の最小値(一般的には、停留値)を，与えられた付帯条件の下で考える。すなわち

$$f(y_1, y_2, \cdots, y_n) = \min \tag{2.2.1a}$$

under

$$\begin{aligned} g_1(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= 0 \\ g_2(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_r(y_1, y_2, \cdots, y_n) &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.1b}$$

と言う最小値問題を考える。

関数fが、Dの内点$P(y_1, y_2, \cdots, y_n)$で最小値をとるものとする。付帯条件(2.2.1b)式を満足するP点からの微小変位ﾍﾞｸﾄﾙを$d\mathbf{y} = (dy_1, dy_2, \cdots, dy_n)$とすると

$$\nabla g_i \cdot d\mathbf{y} = 0, \quad (i = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.2.2}$$

が成立する。ここで，∇はｽｶﾗ関数g_iの勾配(gradient)をとることを意味する。一方，fは，P点を微小変位$d\mathbf{y}$だけ動かしても変化しない。したがって

$$\nabla f \cdot d\mathbf{y} = 0 \tag{2.2.3}$$

を満足しなければならない。(2.2.2)式の条件の下で、(2.2.3)式が成立するためには

$$\nabla f = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \nabla g_i \tag{2.2.4}$$

であればよい。書き方を変えると

$$\frac{\partial f}{\partial y_j} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial y_j} = 0, \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \tag{2.2.5}$$

となる。(2.2.5)式はn個の方程式, (2.2.1b)式はr個の方程式を与えるので，この 2 式を連立させて解けば，$n+r$個の未知変数$y_1, y_2, \cdots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$を決定できる。

以上をまとめると

$$F = F(y_1, y_2, \cdots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r) = f - \sum_{i=1}^{r} \lambda_i g_i \tag{2.2.6a}$$

として

$$\frac{\partial F}{\partial y_1} = \frac{\partial f}{\partial y_1} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_1 \frac{\partial g_i}{\partial y_1} = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_2} = \frac{\partial f}{\partial y_2} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_2 \frac{\partial g_i}{\partial y_2} = 0, \tag{2.2.6b}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial y_n} = \frac{\partial f}{\partial y_n} - \sum_{i=1}^{r} \lambda_n \frac{\partial g_i}{\partial y_n} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = -g_1 = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_2} = -g_2 = 0, \tag{2.2.6c}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial F}{\partial \lambda_r} = -g_r = 0$$

を，$y_1, y_2, \cdots, y_n, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ について解けばよい。このような解法のことを，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭ(Lagrange)の乗数法(method of multipliers)と呼ぶ。また，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_r$ のことを，Lagrange の乗数と呼ぶ。

Lagrange の乗数法を幾何学的に説明してみよう。まず，$n = 2, r = 1$ の場合について考える。図 2.2.1 に示されるように，関数 $f(y_1, y_2)$ は点 $P(y_{P1}, y_{P2})$ で最小値をとる，すなわち $f = \min$ とすると，P 点で曲線 $g(y_1, y_2) = 0$ と曲線 $f(y_1, y_2) = f(y_{P1}, y_{P2}) = f_P$ が接している。すなわち，これらの曲線の法線が平行である。したがって，λ_1 を未知定数として

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 \tag{2.2.7}$$

が成り立つ。

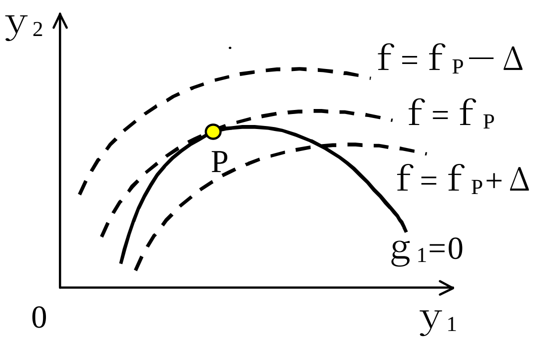

図 2.2.1　$g(y_1, y_2) = 0$ 上での $f(y_1, y_2)$ の最小値

つぎに，$n=3,\ r=2$ の場合について考える。図 2.2.2 に示されるように，関数 $f(y_1,y_2,y_3)$ は点 $P(y_{P1},y_{P2},y_{P3})$ で最小値をとる，すなわち $f=\min$ とすると，P 点で 2 曲面 $g_1(y_1,y_2,y_3)=0,\ g_2(y_1,y_2,y_3)=0$ の交線と曲面 $f(y_1,y_2,y_3)=f(y_{P1},y_{P2},y_{P3})=f_P$ が接している。すなわち，P 点における交線上の仮想変位ﾍﾞｸﾄﾙを $\delta\mathbf{y}=(\delta y_1,\delta y_2,\delta y_3)$ とすると

$$\nabla f\cdot\delta\mathbf{y}=0 \tag{2.2.8}$$

である。一方，$\delta\mathbf{y}$ は $g_1(y_1,y_2,y_3)=0$ 上にあるので

$$\nabla g_1\cdot\delta\mathbf{y}=0 \tag{2.2.9a}$$

を満足する。$\delta\mathbf{y}$ は $g_2(y_1,y_2,y_3)=0$ 上にもあるので

$$\nabla g_2\cdot\delta\mathbf{y}=0 \tag{2.2.9b}$$

も満足する。∇f が ∇g_1 と ∇g_2 の張る平面内にあれば，すなわち，λ_1,λ_2 を未知定数として

$$\nabla f=\lambda_1\nabla g_1+\lambda_2\nabla g_2 \tag{2.2.10}$$

であれば，(2.2.8)式が満足される。

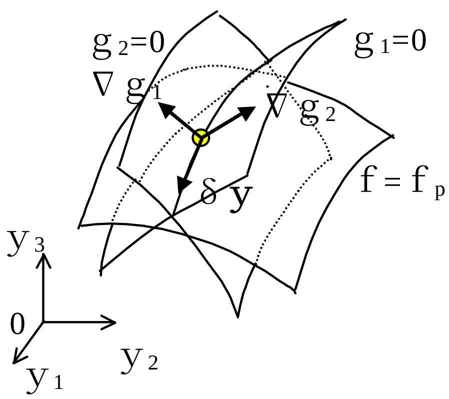

図 2.2.2　$g_1(y_1,y_2,y_3)=0,\ g_2(y_1,y_2,y_3)=0$ 上での $f(y_1,y_2,y_3)$ の最小値

[例 2.2.1]　ばねの釣り合いという力学の簡単な例を考えてみる。すこし後戻りするが、まず付帯条件のない場合について述べる。図 2.2.3 に示されるように，n 個の点 $Q_1(x_1,y_1),Q_{21}(x_2,y_2),\cdots,Q_n(x_n,y_n)$ よりばねで引っ張られ，x,y 方向に力 X,Y が作用している点 $P(x,y)$ の平衡を考えてみよう。PQ_i 間のばねのばね定数を k_i，力の働いていないときの長さを l_i とする。

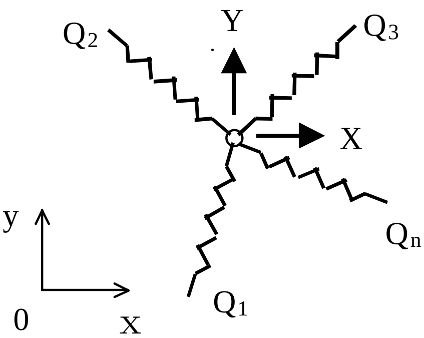

図 2.2.3　n 個の点よりばねで引っ張られている点の平衡

この問題の平衡方程式を，力の釣り合い条件から直接求めることは簡単であるが，ここではﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理を適用してみる。すなわち，この系のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞを $\Pi(x,y)$ とすると，平衡点 $P(x,y)$ では

$$\Pi(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-l_i\right)^2-(Xx+Yy)=\min \qquad (2.2.11)$$

が成立する。Π の右辺第 1 項はばねの歪みｴﾈﾙｷﾞを，第 2 項は外力のﾎﾟﾃﾝｼｬﾙである。(2.2.11)式より

$$\begin{aligned}0=\frac{\partial\Pi}{\partial x}&=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-l_i\right)\frac{(x-x_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}-X,\\0=\frac{\partial\Pi}{\partial y}&=\sum_{i=1}^{n}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}-l_i\right)\frac{(y-y_i)}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}-Y\end{aligned} \qquad (2.2.12)$$

が求まる。これを x,y について解けば，平衡点が求まる。(2.2.12)式のそれぞれが，x 方向，y 方向の力の釣り合いを表していることは，容易に理解されよう。

この問題の面白いのは, 最小値問題(2.2.11)式が数値計算に直接使える点にある。例えば，まず平衡点 $P(x,y)$ の存在しそうな領域にﾒｯｼｭを切って，各ﾒｯｼｭ点で Π の値を計算し，最小点の近似を求める。つぎに，この点の周りにさらに細かいﾒｯｼｭを切って，Π の変化を詳しく調べる。このﾌﾟﾛｾｽを繰り返せば，かなりの精度で平衡点 $P(x,y)$ が求まることになる。

余談になるが，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ･ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理について簡単に説明する。平衡点 $P(x,y)$ が満足すべき平衡方程式は

$$\sum_{i=1}^{n}X_i+X=0 \qquad (2.2.13a)$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i + Y = 0 \tag{2.2.13b}$$

とかける。ここで

$$\begin{aligned} X_i &= -k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} - l_i\right)\frac{x-x_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}}, \\ Y_i &= -k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} - l_i\right)\frac{y-y_i}{\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

である。仮想変位 $(\delta x, \delta y)$ を考えて，(2.2.13a)式に δx を，(2.2.13b)式に δy を乗じて加えると

$$\sum_{i=1}^{n}(X_i\delta x + Y_i\delta y) + (X\delta x + Y\delta y) = 0 \tag{2.2.15}$$

となり，内力と外力がする仕事の総和が零になる。(2.2.15)式は仮想仕事の原理と呼ばれている。(2.2.14)式を書き直すと

$$\begin{aligned} X_i &= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} - l_i\right)\right] = -\frac{\partial U_i}{\partial x}, \\ Y_i &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{2}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} - l_i\right)\right] = -\frac{\partial U_i}{\partial y} \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

となる。ここで

$$U_i(x,y) = \frac{1}{2}k_i\left(\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2} - l_i\right)^2 \tag{2.2.17}$$

とする。U_i は各ばねの持つ歪みｴﾈﾙｷﾞに外ならない。(2.2.16)式を(2.2.15)式に代入すると

$$0 = -\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\delta x + \frac{\partial U_i}{\partial y}\delta y\right) + (X\delta x + Y\delta y)$$

$$= -\frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} U_i - (Xx+Yy)\right)}{\partial x}\delta x - \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{n} U_i - (Xx+Yy)\right)}{\partial y}\delta y$$

$$= -\frac{\partial \Pi}{\partial x}\delta x - \frac{\partial \Pi}{\partial y}\delta y \tag{2.2.18}$$

が得られる。ここで，(2.2.11)式と(2.2.17)式より

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} U_i - (Xx + Yy) \tag{2.2.19}$$

となることが用いられている。(2.2.18)式より

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

が成り立つ。さらに，U_i は非負で凹の関数であるので，Π も同じ性質を有する。したがって，Π は平衡点で停留するだけでなく，最小値をとる。これがﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ・ｴﾈﾙｷﾞ最小の原理である。

つぎに，付帯条件のある場合を考える。上の例において，P 点が曲線 $g(x, y) = 0$ の上に拘束されているものとする。この場合には，(2.2.11)式の代わりに

$$\Pi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} k_i \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - l_i \right)^2 - (Xx + Yy) = \min \tag{2.2.21a}$$

under

$$g(x, y) = 0 \tag{2.2.21b}$$

となる。この場合には，ﾗｸﾞﾗﾝｼﾞｭの乗数法により未定乗数を λ とすると

$$F(x, y, \lambda) = \Pi(x, y) - \lambda g(x, y) \tag{2.2.22}$$

として

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - l_i \right) \frac{x - x_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} - X - \lambda g_x(x, y) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{n} k_i \left(\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - l_i \right) \frac{y - y_i}{\sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}} - Y - \lambda g_y(x, y) = 0 \end{aligned} \tag{2.2.23a}$$

および

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = -g(x, y) = 0 \tag{2.2.23b}$$

を x, y, λ について解けばよい。(2.2.23a)式の $\lambda g_x(x, y), \lambda g_y(x, y)$ を

$$\lambda g_x = \lambda\sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2}\frac{g_x}{\sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2}},$$
$$\lambda g_y = \lambda\sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2}\frac{g_y}{\sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2}} \tag{2.2.24}$$

と書けば，$\lambda\sqrt{{g_x}^2 + {g_y}^2}$ が曲線から受ける反力であることが分かる。

少ない労力で数値計算をしようと思ったら, (2.2.21)式の最小値問題を直接解くことが考えられる。すなわち，$g(x, y) = 0$ 上に数点とって，Π を計算してみる。つぎに，一番小さな Π を与える点の付近をさらに細かくとって，Π を計算して最小値を探す。これを繰り返せば，それなりの精度で平衡点 $P(x, y)$ が求まるであろう。

§2.3　参考文献

[2.1] 林 毅，村 外志夫,「変分法」，応用数学講座第 13 巻，ｺﾛﾅ社，(1958)
[2.2] 寺沢寛一,「数学概論」，岩波書店
[2.3] 寺沢寛一編,「数学概論(応用編)」，岩波書店，(1960)