§2. 多変数関数の停留値問題

§1で述べたように，変分法は多変数関数の停留値問題(例えば，最小値問題)の拡張であるので，まず多変数関数の停留値問題について述べる。

§2.1　付帯条件のない場合

n個の変数$y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n$の関数$f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_n)$がある。この関数の定義域は閉領域$D$とし，停留値を与える点$y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots, y_{n0}$が$D$の内部にあるものとすると，関数$f$は

$$\begin{aligned} &f_{y_1}(y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots, y_{n0}) = 0 \\ &f_{y_2}(y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots, y_{n0}) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &f_{y_n}(y_{10}, y_{20}, \ldots\ldots, y_{n0}) = 0 \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

を満足する。

例えば, 図2.1.1に示されるように, x, y平面上の与えられた2点$P_a(x_a, y_b)$と$P_b(x_b, y_b)$を結ぶ最短曲線を求める問題を，関数の停留値問題として考えてみる。§3 で変分法による取り扱いについて述べるので、両者のつながりをよく理解して欲しい。

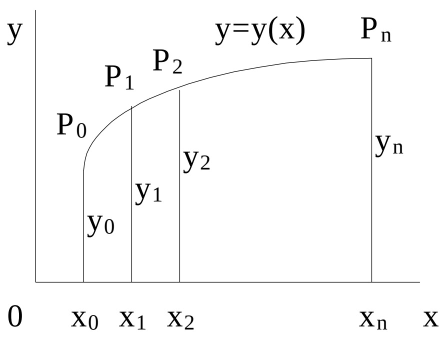

図2.1.1 2点P_1, P_nを結ぶ曲線

2 点P_a, P_bを結ぶ曲線をy=$y(x)$とする。$x_a \le x \le x_b$をn等分した分点を$x_0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_{n-1}, x_n (x_0 = x_a, x_n = x_b)$とし，各分点における$y$の値を$y_0, y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1}, y_n (y_0 = y_a, y_n = y_b)$とする。また, 分点間の幅を$\Delta x$とする。

このとき，2 点P_1, P_nを結ぶ曲線の長さ$f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1})$は

$$f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2} \tag{2.1.2}$$

であるので，曲線の長さが最短になる条件は

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{-(y_{i+1} - y_i)}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}} + \frac{(y_i - y_{i-1})}{\sqrt{\Delta x^2 + (y_i - y_{i-1})^2}} = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.1.3}$$

となる。この条件は，直線$P_i P_{i+1}$と直線$P_{i-1} P_i$がそれぞれx軸となす角の正弦が等しい，すなわち，角が等しいことを意味する。したがって，最短曲線は直線に外ならないことが分かる。

(2.1.3)式を書き直すと

$$\frac{1}{\Delta x}\left[\frac{-(y_{i+1} - y_i)/\Delta x}{\sqrt{1 + [(y_{i+1} - y_i)/\Delta x]^2}} + \frac{(y_i - y_{i-1})/\Delta x}{\sqrt{1 + [(y_i - y_{i-1})/\Delta x]^2}}\right] = 0$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2.1.4}$$

となる。nを無限大にすると

$$-\frac{d}{dx}\left[\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}}\right] = -\frac{d}{dx}\left[\frac{\partial \sqrt{1 + y'^2}}{\partial y'}\right] = 0 \qquad x_0 < x < x_\infty \tag{2.1.5}$$

が言える。また，nが無限大のとき，$f(y_1, y_2, \ldots\ldots, y_{n-1})$を$f[y])$と書くことにして，(2.1.2)式を積分で置き換えると，上述の 2 点を結ぶ最短曲線を求める問題は，$y = y(x)$を未知関数として，最小値問題

$$f[y] = \int_{x_a}^{x_b} \sqrt{1 + y'^2}\, dx = \min \tag{2.1.6a}$$

を境界条件

$$\begin{aligned} y(x_a) &= y_a \\ y(x_b) &= y_b \end{aligned} \tag{2.1.6b}$$

のもとに解く問題に等しいことが分かる。(2.1.5)式は，(2.1.6)式で与えられる最小値問題の解が満たすべき条件である。(2.1.5)式より

$$y' = const \tag{2.1.7}$$

となるので，最短曲線は直線であると言う当然の結果が，この場合にも得られた。

$f[y]$は関数の関数であり，fのことを汎関数(functional)，yのことを変関数(argument function)と呼ぶ。変分法(calculus of variation)とは，このような汎関数の停留値問題を論ずる数学の一分野のことである。(2.1.5)式は，(2.1.6)式で与えられる変分問題のｵｲﾗ-(Euler)の方程式と呼ばれる。

上では，最短曲線と言う具体的な例について述べたが，もう少し抽象的な場合を簡単に取り上げる。

以下のような汎関数$I[y]$の最小値問題を考えてみよう。必ずしも最小値問題である必要はない。最も一般的には，停留値問題であればよい。すなわち

$$I[y]=\int_{x_a}^{x_b}F(x,y,y')dx=\min \tag{2.1.8a}$$

under

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_\infty)=y_\infty \tag{2.1.8b}$$

とする。(2.1.6a)式を(2.1.2)式で近似したのと同じ近似を用いると、(2.1.8a)式は

$$I=\sum_{i=0}^{n-1}F(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})=\min \tag{2.1.9}$$

となる。したがって，Iが最小値をとる条件として

$$\frac{\partial I}{\partial y_i}=F_y(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})-\frac{1}{\Delta x}F_{y'}(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})+\frac{1}{\Delta x}F_{y'}(x_{i-1},y_{i-1},\frac{y_i-y_{i-1}}{\Delta x})=0$$

$$i=1,2,.....,n-1 \tag{2.1.10}$$

が求まる。ここで，$F_y(x_i,y_i,\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x})$は，$F_y(x,y,y')$の$x=x_i$，$y=y_i$，$y'=\frac{y_{i+1}-y_i}{\Delta x}$における値である。$n$を無限大にすると

$$F_y(x,y,y')-\frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')=0 \qquad x_a<x<x_b \tag{2.1.11}$$

となる。これが，この場合の Euler の方程式である。

汎関数の停留値問題を多変数関数で近似する考え方は，変分法の数値解を直接求める，いわゆる変分法の直接解法のもとにもなっている。その意味で重要な考え方である。