§1. 変分法とは

変分法(calculus of variation)とは，例えば$x_a \le x \le x_b$で定義された未知関数$y = y(x)$の関数である汎関数$I[y]$

$$I[y] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y')dx \tag{1.1}$$

を，境界条件，例えば

$$\begin{aligned} y(x_a) &= y_a \\ y(x_b) &= y_b \end{aligned} \tag{1.2}$$

の条件の下で停留させる停留値問題(例えば，最小値問題)の解法のことである。

この問題に対して，以下に述べるような近似解法が可能であろう。すなわち，区間$[x_a, x_b]$をn等分して、区間幅をΔx，分点を$x_0 = x_a, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = x_b$，分点上の$y$の値を$y_0 = y_a, y_1, ..., y_{n-1}, y_n = y_b$として，(1.1)式の積分を和分で近似すると

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x})\Delta x \tag{1.3}$$

となり，変数$y_1, y_2, ..., y_{n-1}$の関数Iの停留値問題となる。このように考えると，変分法は多変数関数の停留値問題の拡張であることが分かる。

物理学における種々の原理は，汎関数の停留値原理の形で与えられることがよくある。ﾌｪﾙﾏｰの光路程最小の原理，力学のﾊﾐﾙﾄﾝの原理，弾性ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ最小の原理，静電場におけるﾄﾑｿﾝの原理，ﾎﾟﾃﾝｼｬﾙ論におけるﾃﾞｨﾘｸﾚの原理などである。ﾌｪﾙﾏｰの光路程極小の原理によれば，空間の 2 点を通る光の経路は，光が 2 点を通過するのに要する時間を最短にするものである。このようなものを変分原理(variational principle)と呼ぶ。

変分法は物理学上の重要な原理の記述とそれから導かれる理論的関係の議論にとって，極めて重要である。理論面ばかりでなく実用面においても重要で，境界値問題や固有値問題の数値解を求める上で，強力な手段を提供してくれる。今日各方面で盛んに使われている有限要素法(Finite Element Method)の基礎となっているのも，実は変分法なのである。