

質問と回答

[質問 1] : Legendre 変換がよく分からないのですが。(大阪, K.M.さん)

回答 : Legendre 変換は, 最初取っ付きが悪くて何をやっているのか訳が分からないという印象を受けますが, 本来はそんなに難しいものではありません。

簡単のために, 1 次元の調和振動子という具体的な問題を例にとって説明します。質量を m , ばね定数を k , 時間を t , 変位を q とすると, Lagrange 関数は L は

$$L(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \quad (\text{Q1.1})$$

と書けます。新しい変数 p を

$$p = L_{\dot{q}} = m \dot{q} \quad (\text{Q1.2})$$

で定義します。この新しい変数は, 物理的には運動量を意味します。(Q1.2)

式より, \dot{q} を p で表すと

$$\dot{q} = p/m \quad (\text{Q1.3})$$

となります。すると, Hamilton 関数 H は

$$\begin{aligned} H = p\dot{q} - L(t, q, \dot{q}) &= p\dot{q} - \left(\frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right) \\ &= p \frac{p}{m} - \left[\frac{1}{2} m \left(\frac{p}{m} \right)^2 - \frac{1}{2} k q^2 \right] = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} k q^2 \end{aligned} \quad (\text{Q1.4})$$

と書けます。この \dot{q} , L から p , H への変換のことを, Legendre 変換と言います。 $H = H(t, q, p)$ は, 系のエネルギーに等しい。

以上のことを抽象的に述べると, 以下のようになります。すなわち, Lagrange 関数 $L(t, q, \dot{q})$ に対して

$$p = L_{\dot{q}} \quad (\text{Q1.5a})$$

$$H = H(t, q, p) = p\dot{q} - L(t, q, \dot{q}) \quad (\text{Q1.5b})$$

により, \dot{q} , L から p , H への変換が可能であり, この変換のことを Legendre 変換と呼びます。

[質問 2] : 汎関数 $I[y]$ の最小値問題

$$I[y] = \int_{x_a}^{x_b} F(x, y, y') dx = \min \quad (2.1.8a)$$

under

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_\infty) = y_\infty \quad (2.1.8b)$$

が

$$I = \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) = \min \quad (2.1.9)$$

という多変数関数の最小値問題で近似され, さらに停留条件が

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) - \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) + \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) = 0$$

$$i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (2.1.10)$$

となり, $n \rightarrow \infty$ の極限が

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0 \quad x_a < x < x_b \quad (2.1.11)$$

となるとされ, この場合の Euler の方程式であるとありますが, 分かり難いのですが。(函館, K.K.さん)

回答: 領域 $x_a \leq x \leq x_b$ を n 等分して, 分点を x_i , ($i = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$) として

$$I = \int_{x_0}^{x_\infty} F(x, y, y') dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y, y') dx$$

$$\approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, y'_i) \Delta x \approx \sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x \quad (Q2.1)$$

と近似できます。この近似により, 汎関数の停留値問題が多変数関数の停留値問題になります。したがって, 停留条件は

$$\frac{\partial I}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_i} \left[\sum_{i=0}^{n-1} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \Delta x \right], \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (Q2.2)$$

とすればよいこととなります。境界条件により, $y_0 = y_a$ と $y_n = y_b$ ですから, y_0 と y_n は固定値を取りますので, 微分の対象にはなりません。変数 y_i は F の第 2 引数と第 3 引数にふくまれます。第 2 引数に関しては問題ないと思いますが, 第 3 引数に関しては, 区間 $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ における

$F(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x})$ および区間 $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ における $F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x})$ に含ま

れますので, (2.1.10)式の右辺第2項と第3項が出てきます。具体的には

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} F(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) &= F_{y'}(x, y, y') \Big|_{x=x_{i-1}, y=y_{i-1}, y'=\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x} \right) \\ &= + \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (\text{Q2.3a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y_i} F(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) &= F_{y'}(x, y, y') \Big|_{x=x_i, y=y_i, y'=\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}} \frac{\partial}{\partial y_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right) \\ &= - \frac{1}{\Delta x} F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (\text{Q2.3b})$$

となります。

さらに, $F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x})$ は, $F_y(x, y, y')$ の $x = x_i$, $y = y_i$, $y' = \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}$ に

おける値ですから

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial y_i} &= F_y(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} \left[F_{y'}(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x}) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, \frac{y_i - y_{i-1}}{\Delta x}) \right] \\ &\approx F_y(x_i, y_i, y'_i) \\ &\quad - \frac{1}{\Delta x} [F_{y'}(x_i, y_i, y'_i) - F_{y'}(x_{i-1}, y_{i-1}, y'_{i-1})] \end{aligned} \quad (\text{Q2.4})$$

となります。したがって, n を無限大にすると(2.1.11)式が導けます。